Kaj vse lahko narišemo z ravnilom in šestilom?

Marko Orel

Univerza na Primorskem, Fakulteta za matematiko, naravoslovje in informacijske tehnologije

- Kaj pomeni “risanje z ravnilom in šestilom”?
- Katere pravilne n-kotnike lahko narišemo na tak način?

- Kaj pomeni “risanje z ravnilom in šestilom”?
- Katere pravilne n-kotnike lahko narišemo na tak način?

Fermatova praštevila

- Naravno število je praštevilo, če ima med naravnimi števili natanko dva delitelja.

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots$$

- Praštevilo je Fermatovo , če je oblike $2^n + 1$, kjer $n \in \mathbb{N}$.
- Fermatovo praštevilo je nujno oblike $2^{2^k} + 1$.

Pierre de Fermat (1601/1607/1608?–1665) pravnik in ljubitelj matematike

Fermatova praštevila

- Naravno število je praštevilo, če ima med naravnimi števili natanko dva delitelja.

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots$$

- Praštevilo je Fermatovo , če je oblike $2^n + 1$, kjer $n \in \mathbb{N}$.
- Fermatovo praštevilo je nujno oblike $2^{2^k} + 1$.

Pierre de Fermat (1601/1607/1608?–1665) pravnik in ljubitelj matematike

Fermatova praštevila

- Naravno število je praštevilo, če ima med naravnimi števili natanko dva delitelja.

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots$$

- Praštevilo je Fermatovo , če je oblike $2^n + 1$, kjer $n \in \mathbb{N}$.
- Fermatovo praštevilo je nujno oblike $2^{2^k} + 1$.

Pierre de Fermat (1601/1607/1608?–1665) pravnik in ljubitelj matematike

Fermatova praštevila

- Naravno število je praštevilo, če ima med naravnimi števili natanko dva delitelja.

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots$$

- Praštevilo je Fermatovo , če je oblike $2^n + 1$, kjer $n \in \mathbb{N}$.
- Fermatovo praštevilo je nujno oblike $2^{2^k} + 1$.

Pierre de Fermat (1601/1607/1608?–1665) pravnik in ljubitelj matematike

Fermatova praštevila

- Razlog: če ima n lihega delitelja $b > 1$, potem je $n = ab$ in

$$2^n + 1 = (2^a)^b + 1 =$$
$$= (2^a + 1)\Big((2^a)^{b-1} - (2^a)^{b-2} + (2^a)^{b-3} -$$
$$- \ldots + (2^a)^2 - 2^a + 1\Big)$$

- Poznanih je le pet Fermatovih praštevil:
  - $2^{2^0} + 1 = 3$,
  - $2^{2^1} + 1 = 5$,
  - $2^{2^2} + 1 = 17$,
  - $2^{2^3} + 1 = 257$,
  - $2^{2^4} + 1 = 65537$.

Fermatova praštevila

- Razlog: če ima n lihega delitelja $b > 1$,potem je $n = ab$ in

$$2^n + 1 = (2^a)^b + 1 =$$
$$= (2^a + 1)\Big((2^a)^{b-1} - (2^a)^{b-2} + (2^a)^{b-3} -$$
$$- \ldots + (2^a)^2 - 2^a + 1\Big)$$

- Poznanih je le pet Fermatovih praštevil:
  - $2^{2^0} + 1 = 3$,
  - $2^{2^1} + 1 = 5$,
  - $2^{2^2} + 1 = 17$,
  - $2^{2^3} + 1 = 257$,
  - $2^{2^4} + 1 = 65537$.

Fermatova praštevila

- Razlog: če ima n lihega delitelja $b > 1$,potem je $n = ab$ in

$$2^n + 1 = (2^a)^b + 1 =$$
$$= (2^a + 1)\Big((2^a)^{b-1} - (2^a)^{b-2} + (2^a)^{b-3} -$$
$$- \ldots + (2^a)^2 - 2^a + 1\Big)$$

- Poznanih je le pet Fermatovih praštevil:
  - $2^{2^0} + 1 = 3$,
  - $2^{2^1} + 1 = 5$,
  - $2^{2^2} + 1 = 17$,
  - $2^{2^3} + 1 = 257$,
  - $2^{2^4} + 1 = 65537$.

Fermatova praštevila

- Razlog: če ima n lihega delitelja $b > 1$,potem je $n = ab$ in

$$2^n + 1 = (2^a)^b + 1 =$$
$$= (2^a + 1)\Big((2^a)^{b-1} - (2^a)^{b-2} + (2^a)^{b-3} -$$
$$- \ldots + (2^a)^2 - 2^a + 1\Big)$$

- Poznanih je le pet Fermatovih praštevil:
  - $2^{2^0} + 1 = 3$,
  - $2^{2^1} + 1 = 5$,
  - $2^{2^2} + 1 = 17$,
  - $2^{2^3} + 1 = 257$,
  - $2^{2^4} + 1 = 65537$.

Fermatova praštevila

- Razlog: če ima n lihega delitelja $b > 1$,potem je $n = ab$ in

$$2^n + 1 = (2^a)^b + 1 =$$
$$= (2^a + 1)\Big((2^a)^{b-1} - (2^a)^{b-2} + (2^a)^{b-3} -$$
$$- \ldots + (2^a)^2 - 2^a + 1\Big)$$

- Poznanih je le pet Fermatovih praštevil:
  - $2^{2^0} + 1 = 3$,
  - $2^{2^1} + 1 = 5$,
  - $2^{2^2} + 1 = 17$,
  - $2^{2^3} + 1 = 257$,
  - $2^{2^4} + 1 = 65537$.

Fermatova praštevila

- Število $2^{2^i} + 1$ NI praštevilo za $i \in \{5, 6, \ldots, 32\}$.
- Ne ve se, ali obstaja neskončno Fermatovih praštevil.
- Ne ve se, ali obstaja neskončno števil $2^{2^i} + 1$, ki niso praštevila.

Fermatova praštevila

- Število $2^{2^i} + 1$ NI praštevilo za $i \in \{5, 6, \ldots, 32\}$.
- Ne ve se, ali obstaja neskončno Fermatovih praštevil.
- Ne ve se, ali obstaja neskončno števil $2^{2^i} + 1$, ki niso praštevila.

Fermatova praštevila

- Število $2^{2^i} + 1$ NI praštevilo za $i \in \{5, 6, \ldots, 32\}$.
- Ne ve se, ali obstaja neskončno Fermatovih praštevil.
- Ne ve se, ali obstaja neskončno števil $2^{2^i} + 1$, ki niso praštevila.

Gauss-Wantzel-ov izrek, 1837

Pravilni n-kotnik se da narisati z ravnilom in šestilom

natanko tedaj, ko je

$$n = 2^k p_1 p_2 \cdots p_j,$$

kjer so $p_1, p_2, \ldots, p_j$ različna Fermatova praštevila.

Pravilni n-kotniki, ki se dajo narisati ($n \leq 100$):

$$3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 30,$$
$$32, 34, 40, 48, 51, 60, 64, 68, 80, 85, 96$$

Johann Carl Friedrich Gauss (1777–1855) slavni matematik

Pierre Laurent Wantzel (1814–1848) francoski matematik

Gauss-Wantzel-ov izrek, 1837

Pravilni n-kotnik se da narisati z ravnilom in šestilom

natanko tedaj, ko je

$$n = 2^k p_1 p_2 \cdots p_j,$$

kjer so $p_1, p_2, \ldots, p_j$ različna Fermatova praštevila.

Pravilni n-kotniki, ki se dajo narisati ($n \leq 100$):

$$3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 30,$$
$$32, 34, 40, 48, 51, 60, 64, 68, 80, 85, 96$$

Johann Carl Friedrich Gauss (1777–1855) slavni matematik

Pierre Laurent Wantzel (1814–1848) francoski matematik

Gauss-Wantzel-ov izrek, 1837

Pravilni n-kotnik se da narisati z ravnilom in šestilom

natanko tedaj, ko je

$$n = 2^k p_1 p_2 \cdots p_j,$$

kjer so $p_1, p_2, \ldots, p_j$ različna Fermatova praštevila.

Pravilni n-kotniki, ki se dajo narisati ($n \leq 100$):

$$3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 30,$$
$$32, 34, 40, 48, 51, 60, 64, 68, 80, 85, 96$$

Johann Carl Friedrich Gauss (1777–1855) slavni matematik
Pierre Laurent Wantzel (1814–1848) francoski matematik

Gauss-Wantzel-ov izrek, 1837

Pravilni n-kotnik se da narisati z ravnilom in šestilom

natanko tedaj, ko je

$$n = 2^k p_1 p_2 \cdots p_j,$$

kjer so $p_1, p_2, \ldots, p_j$ različna Fermatova praštevila.

Pravilni n-kotniki, ki se dajo narisati ($n \leq 100$):

$$3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 30,$$
$$32, 34, 40, 48, 51, 60, 64, 68, 80, 85, 96$$

Johann Carl Friedrich Gauss (1777–1855) slavni matematik
Pierre Laurent Wantzel (1814–1848) francoski matematik

Zelo groba skica dokaza

Uvedemo Eulerjevo funckijo $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$\varphi(n) = |\{m \in \mathbb{N} : m \leq n, D(m,n) = 1\}|$$

Lastnosti:

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n), \text{če } m \text{ in } n \text{ tuji}$$
$$\varphi(p^k) = p^{k-1}(p-1), \text{če } p \text{ praštevilo}$$

Leonhard Euler (1707–1783) slavni matematik

Zelo groba skica dokaza

Uvedemo Eulerjevo funckijo $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$\varphi(n) = |\{m \in \mathbb{N} \,:\, m \leq n, D(m,n) = 1\}|$$

Lastnosti:

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n), \text{če } m \text{ in } n \text{ tuji}$$
$$\varphi(p^k) = p^{k-1}(p-1), \text{če } p \text{ praštevilo}$$

Leonhard Euler (1707–1783) slavni matematik

Zelo groba skica dokaza

Uvedemo Eulerjevo funckijo $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$\varphi(n) = |\{m \in \mathbb{N} \,:\, m \leq n, D(m,n) = 1\}|$$

Lastnosti:

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n), \text{če } m \text{ in } n \text{ tuji}$$
$$\varphi(p^k) = p^{k-1}(p-1), \text{če } p \text{ praštevilo}$$

Leonhard Euler (1707–1783) slavni matematik

Zelo groba skica dokaza

T.i. "teorija obsegov" (Galois) pove, da se da pravilni n-kotnik narisati natanko tedaj, ko je

$$\varphi(n) = 2^k.$$

$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_j^{k_j}$, p_i različna praštevila, $k_i \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\varphi(n) &= \varphi(p_1^{k_1})\varphi(p_2^{k_2} \cdots p_j^{k_j}) = \ldots = \\ &= \varphi(p_1^{k_1})\varphi(p_2^{k_2}) \cdots \varphi(p_j^{k_j}) = \\ &= p_1^{k_1-1}(p_1 - 1)p_2^{k_2-1}(p_1 - 1) \cdots p_j^{k_j-1}(p_j - 1).\end{aligned}$$

Torej $p_i = 2$ ali $k_i = 1$ in p_i Fermatovo praštevilo

Évariste Galois (1811–1832) slavni matematik

Zelo groba skica dokaza

T.i. "teorija obsegov" (Galois) pove, da se da pravilni n-kotnik narisati natanko tedaj, ko je

$$\varphi(n) = 2^k.$$

$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_j^{k_j}$, p_i različna praštevila, $k_i \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\varphi(n) &= \varphi(p_1^{k_1})\varphi(p_2^{k_2} \cdots p_j^{k_j}) = \ldots = \\ &= \varphi(p_1^{k_1})\varphi(p_2^{k_2}) \cdots \varphi(p_j^{k_j}) = \\ &= p_1^{k_1-1}(p_1 - 1)p_2^{k_2-1}(p_1 - 1) \cdots p_j^{k_j-1}(p_j - 1).\end{aligned}$$

Torej $p_i = 2$ ali $k_i = 1$ in p_i Fermatovo praštevilo

Évariste Galois (1811–1832) slavni matematik

Zelo groba skica dokaza

T.i. "teorija obsegov" (Galois) pove, da se da pravilni n-kotnik narisati natanko tedaj, ko je

$$\varphi(n) = 2^k.$$

$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_j^{k_j}$, p_i različna praštevila, $k_i \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\varphi(n) &= \varphi(p_1^{k_1})\varphi(p_2^{k_2} \cdots p_j^{k_j}) = \ldots = \\ &= \varphi(p_1^{k_1})\varphi(p_2^{k_2}) \cdots \varphi(p_j^{k_j}) = \\ &= p_1^{k_1-1}(p_1 - 1)p_2^{k_2-1}(p_1 - 1) \cdots p_j^{k_j-1}(p_j - 1).\end{aligned}$$

Torej $p_i = 2$ ali $k_i = 1$ in p_i Fermatovo praštevilo

Évariste Galois (1811–1832) slavni matematik

Zelo groba skica dokaza

T.i. "teorija obsegov" (Galois) pove, da se da pravilni n-kotnik narisati natanko tedaj, ko je

$$\varphi(n) = 2^k.$$

$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_j^{k_j}$, p_i različna praštevila, $k_i \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\varphi(n) &= \varphi(p_1^{k_1})\varphi(p_2^{k_2} \cdots p_j^{k_j}) = \ldots = \\ &= \varphi(p_1^{k_1})\varphi(p_2^{k_2}) \cdots \varphi(p_j^{k_j}) = \\ &= p_1^{k_1-1}(p_1 - 1)p_2^{k_2-1}(p_1 - 1) \cdots p_j^{k_j-1}(p_j - 1).\end{aligned}$$

Torej $p_i = 2$ ali $k_i = 1$ in p_i Fermatovo praštevilo

Évariste Galois (1811–1832) slavni matematik

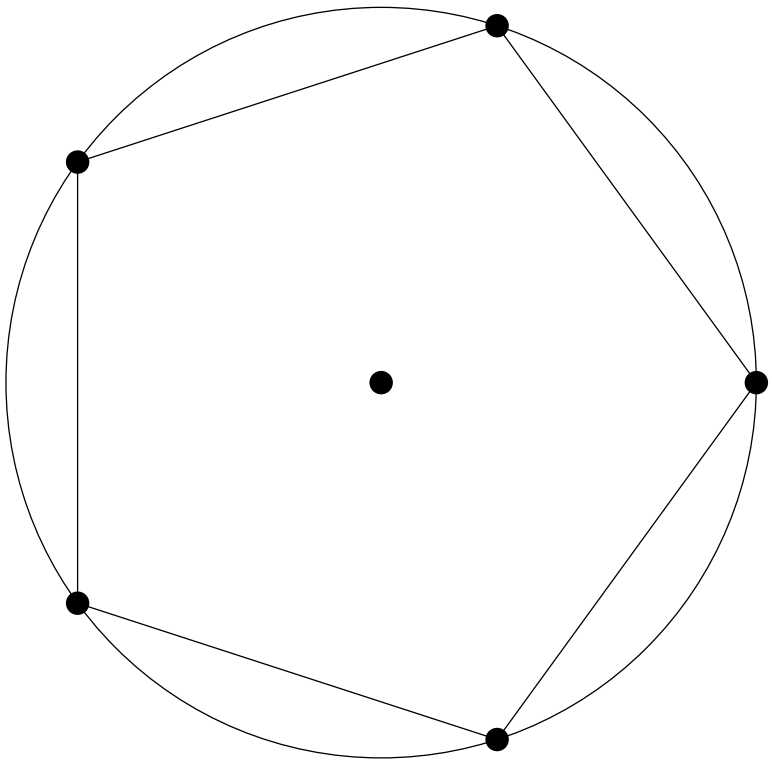
Kako narišemo pravilne n-kotnike?

Kako narišemo pravilne n-kotnike?

Če znamo narisati n-kotnik, potem znamo narisati tudi $2n$-kotnik:

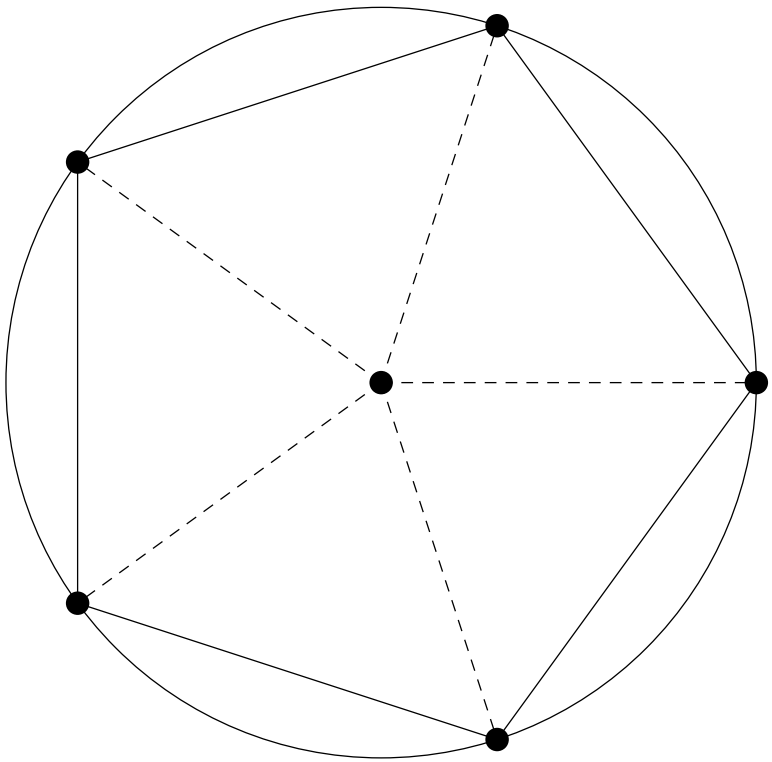
Kako narišemo pravilne n-kotnike?

Če znamo narisati n-kotnik, potem znamo narisati tudi $2n$-kotnik:



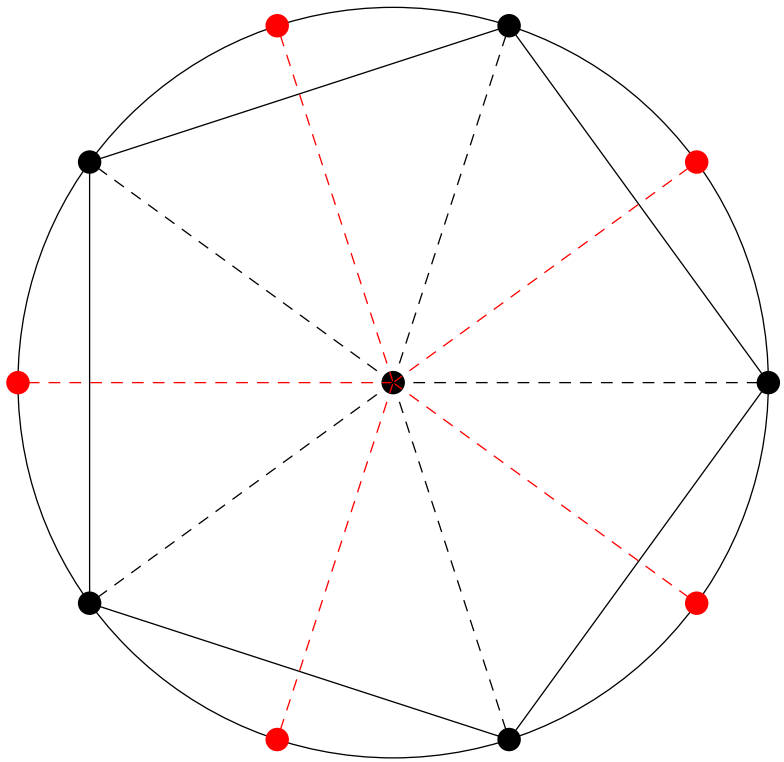
Kako narišemo pravilne n-kotnike?

Če znamo narisati n-kotnik, potem znamo narisati tudi $2n$-kotnik:



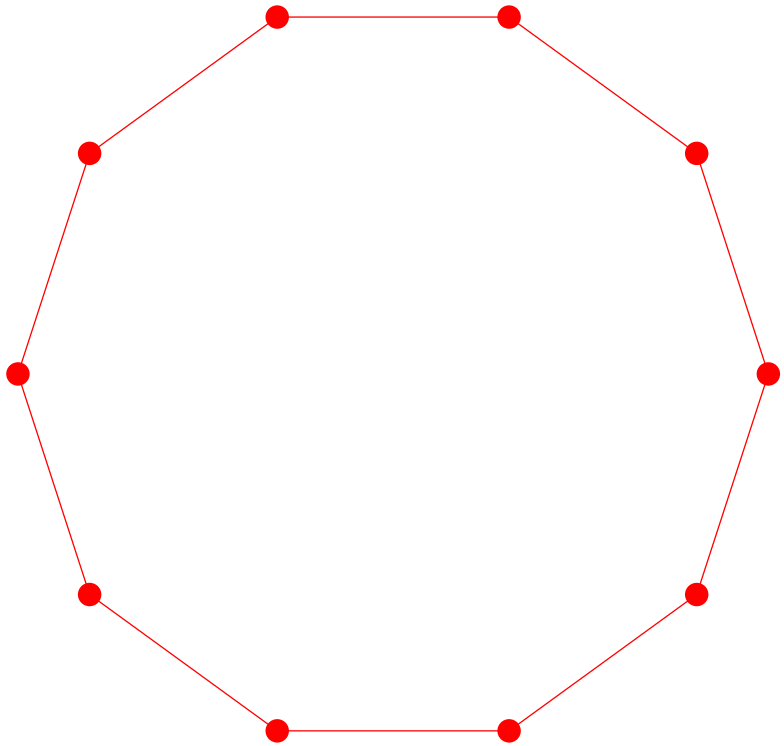
Kako narišemo pravilne n-kotnike?

Če znamo narisati n-kotnik, potem znamo narisati tudi $2n$-kotnik:



Kako narišemo pravilne n-kotnike?

Če znamo narisati n-kotnik, potem znamo narisati tudi $2n$-kotnik:



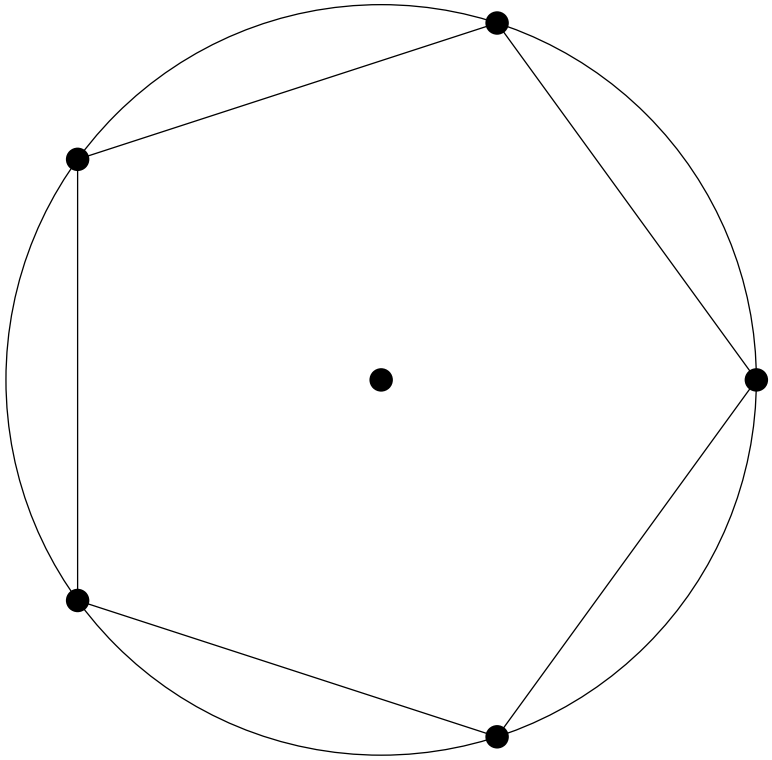
Kako narišemo pravilne n-kotnike?

Kako narišemo pravilne n-kotnike?

Če znamo narisati p-kotnik in q-kotnik ter velja, da sta p in q tuja, potem znamo narisati tudi pq-kotnik:

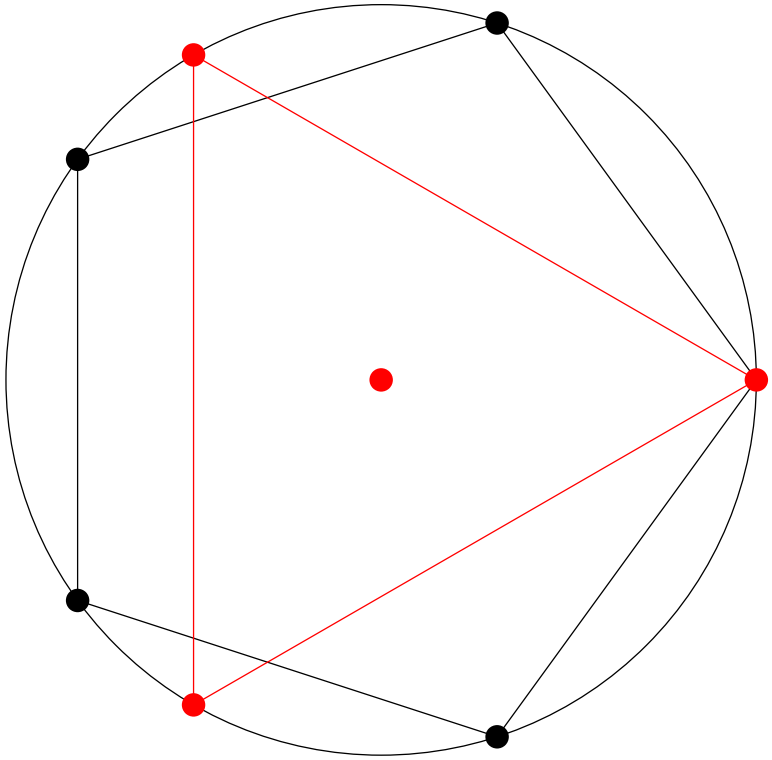
Kako narišemo pravilne n-kotnike?

Če znamo narisati p-kotnik in q-kotnik ter velja, da sta p in q tuja, potem znamo narisati tudi pq-kotnik:



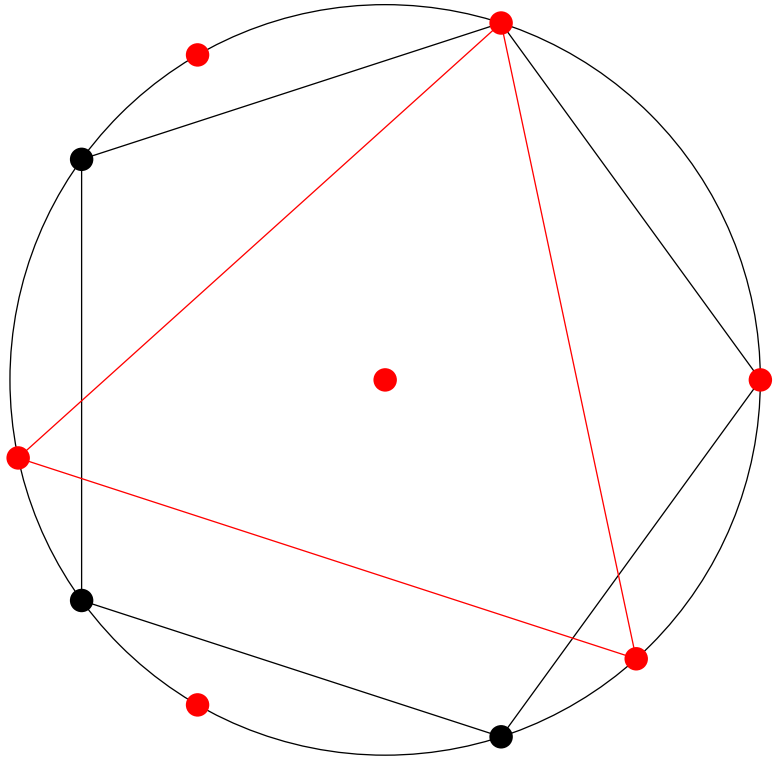
Kako narišemo pravilne n-kotnike?

Če znamo narisati p-kotnik in q-kotnik ter velja, da sta p in q tuja, potem znamo narisati tudi pq-kotnik:



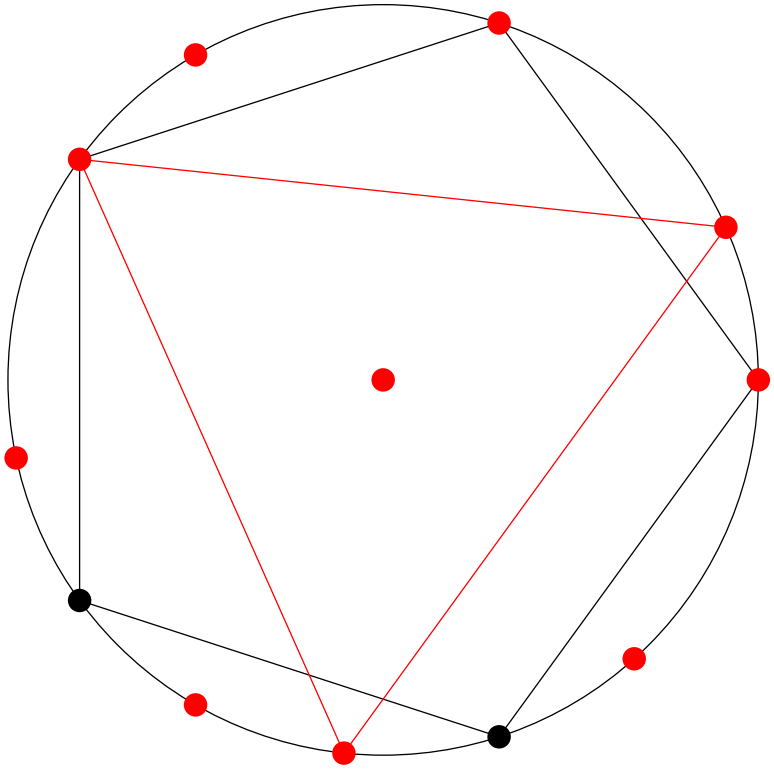
Kako narišemo pravilne n-kotnike?

Če znamo narisati p-kotnik in q-kotnik ter velja, da sta p in q tuja, potem znamo narisati tudi pq-kotnik:



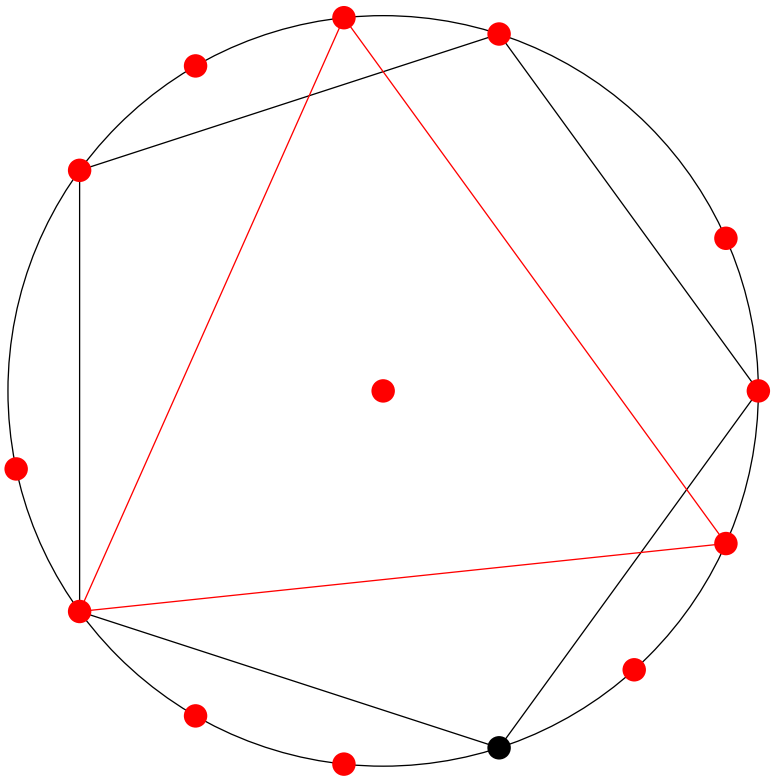
Kako narišemo pravilne n-kotnike?

Če znamo narisati p-kotnik in q-kotnik ter velja, da sta p in q tuja, potem znamo narisati tudi pq-kotnik:



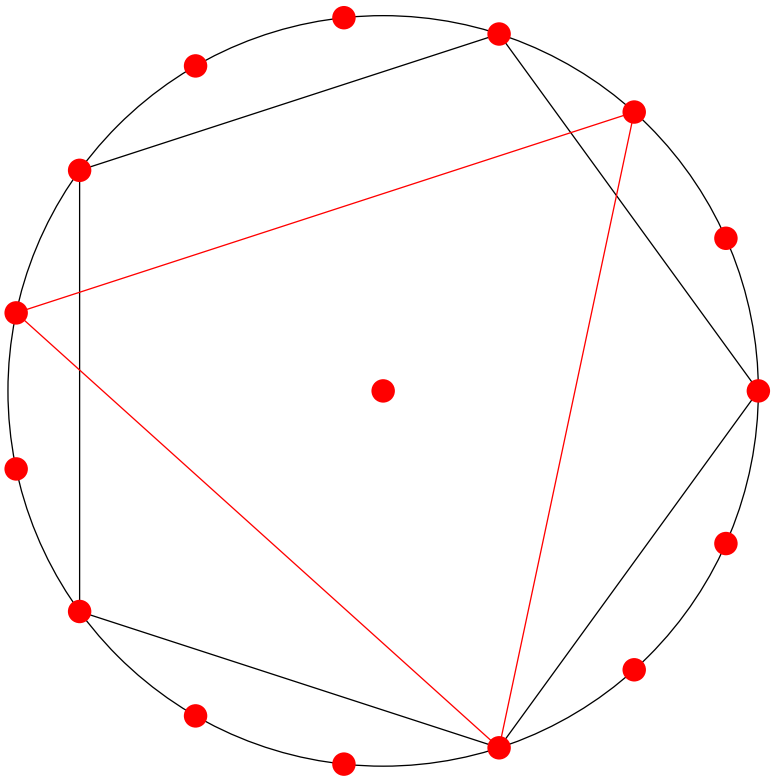
Kako narišemo pravilne n-kotnike?

Če znamo narisati p-kotnik in q-kotnik ter velja, da sta p in q tuja, potem znamo narisati tudi pq-kotnik:



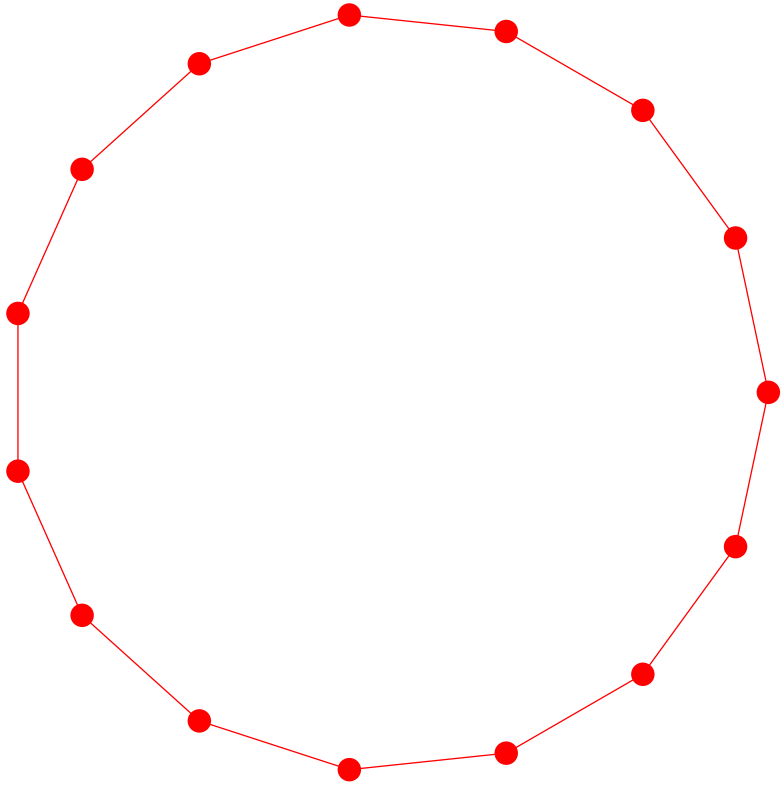
Kako narišemo pravilne n-kotnike?

Če znamo narisati p-kotnik in q-kotnik ter velja, da sta p in q tuja, potem znamo narisati tudi pq-kotnik:



Kako narišemo pravilne n-kotnike?

Če znamo narisati p-kotnik in q-kotnik ter velja, da sta p in q tuja, potem znamo narisati tudi pq-kotnik:



Zakaj je konstrukcija pq-kotnika pravilna?

Ker sta p in q tuji, obstajata celi števili a in b, tako da velja $ap + bq = 1$.Če enačbo pomnožimo z $360^\circ/(pq)$ dobimo

$$a \cdot \frac{360^\circ}{q} + b \cdot \frac{360^\circ}{p} = \frac{360^\circ}{pq}.$$

Zakaj je konstrukcija pq-kotnika pravilna?

Ker sta p in q tuji, obstajata celi števili a in b, tako da velja $ap + bq = 1$. Če enačbo pomnožimo z $360^\circ/(pq)$ dobimo

$$a \cdot \frac{360^\circ}{q} + b \cdot \frac{360^\circ}{p} = \frac{360^\circ}{pq}.$$

Zakaj je konstrukcija pq-kotnika pravilna?

Ker sta p in q tuji, obstajata celi števili a in b, tako da velja $ap + bq = 1$.Če enačbo pomnožimo z $360^\circ/(pq)$ dobimo

$$a \cdot \frac{360^\circ}{q} + b \cdot \frac{360^\circ}{p} = \frac{360^\circ}{pq}.$$

Risanje n-kotnikov, n Fermatovo praštevilo

Sklep: če znamo narisati n-kotnike, kjer je n Fermatovo praštevilo, potem znamo narisati tudi vse ostale (ki se jih da narisati)

- trikotnik
- petkotnik(Zakaj konstrukcija pravilna?)
- 17-kotnik
- 257-kotnik (Richelot 1832)
- 65537-kotnik (Hermes 1894, $\geq$ 200 strani)*

Friedrich Julius Richelot (1808–1875) nemški matematik

Johann Gustav Hermes (1846–1912) nemški matematik

Risanje n-kotnikov, n Fermatovo praštevilo

Sklep: če znamo narisati n-kotnike, kjer je n Fermatovo praštevilo, potem znamo narisati tudi vse ostale (ki se jih da narisati)

- trikotnik
- petkotnik(Zakaj konstrukcija pravilna?)
- 17-kotnik
- 257-kotnik (Richelot 1832)
- 65537-kotnik (Hermes 1894, $\geq$ 200 strani)*

Friedrich Julius Richelot (1808–1875) nemški matematik

Johann Gustav Hermes (1846–1912) nemški matematik

Risanje n-kotnikov, n Fermatovo praštevilo

Sklep: če znamo narisati n-kotnike, kjer je n Fermatovo praštevilo, potem znamo narisati tudi vse ostale (ki se jih da narisati)

- trikotnik
- petkotnik(Zakaj konstrukcija pravilna?)
- 17-kotnik
- 257-kotnik (Richelot 1832)
- 65537-kotnik (Hermes 1894, $\geq$ 200 strani)*

Friedrich Julius Richelot (1808–1875) nemški matematik

Johann Gustav Hermes (1846–1912) nemški matematik

Risanje n-kotnikov, n Fermatovo praštevilo

Sklep: če znamo narisati n-kotnike, kjer je n Fermatovo praštevilo, potem znamo narisati tudi vse ostale (ki se jih da narisati)

- trikotnik
- petkotnik(Zakaj konstrukcija pravilna?)
- 17-kotnik
- 257-kotnik (Richelot 1832)
- 65537-kotnik (Hermes 1894, $\geq$ 200 strani)*

Friedrich Julius Richelot (1808–1875) nemški matematik

Johann Gustav Hermes (1846–1912) nemški matematik

Risanje n-kotnikov, n Fermatovo praštevilo

Sklep: če znamo narisati n-kotnike, kjer je n Fermatovo praštevilo, potem znamo narisati tudi vse ostale (ki se jih da narisati)

- trikotnik
- petkotnik(Zakaj konstrukcija pravilna?)
- 17-kotnik
- 257-kotnik (Richelot 1832)
- 65537-kotnik (Hermes 1894, $\geq$ 200 strani)*

Friedrich Julius Richelot (1808–1875) nemški matematik

Johann Gustav Hermes (1846–1912) nemški matematik

Risanje n-kotnikov, n Fermatovo praštevilo

Sklep: če znamo narisati n-kotnike, kjer je n Fermatovo praštevilo, potem znamo narisati tudi vse ostale (ki se jih da narisati)

- trikotnik
- petkotnik(Zakaj konstrukcija pravilna?)
- 17-kotnik
- 257-kotnik (Richelot 1832)
- 65537-kotnik (Hermes 1894, $\geq$ 200 strani)*

Friedrich Julius Richelot (1808–1875) nemški matematik

Johann Gustav Hermes (1846–1912) nemški matematik

Risanje n-kotnikov, n Fermatovo praštevilo

Sklep: če znamo narisati n-kotnike, kjer je n Fermatovo praštevilo, potem znamo narisati tudi vse ostale (ki se jih da narisati)

- trikotnik
- petkotnik(Zakaj konstrukcija pravilna?)
- 17-kotnik
- 257-kotnik (Richelot 1832)
- 65537-kotnik (Hermes 1894, $\geq$ 200 strani)*

Friedrich Julius Richelot (1808–1875) nemški matematik

Johann Gustav Hermes (1846–1912) nemški matematik

Risanje n-kotnikov, n Fermatovo praštevilo

Sklep: če znamo narisati n-kotnike, kjer je n Fermatovo praštevilo, potem znamo narisati tudi vse ostale (ki se jih da narisati)

- trikotnik
- petkotnik(Zakaj konstrukcija pravilna?)
- 17-kotnik
- 257-kotnik (Richelot 1832)
- 65537-kotnik (Hermes 1894, $\geq$ 200 strani)*

Friedrich Julius Richelot (1808–1875) nemški matematik

Johann Gustav Hermes (1846–1912) nemški matematik

Hvala za pozornost.