FAMNITov poletni tabor 2011

Kdo bo vse to oplel?

Dragan Stevanović, dragance106@yahoo.com

Sodo-liho

1. Za okroglo mizo sedi 2011 predstavnikov štirih držav: Kitajci, Mongoli, Američani in Kanadčani. Znano je, da Kitajec nikoli ne sedi poleg Mongolca in da Američan nikoli ne sedi poleg Kanadčana. Dokaži, da obstajata dva predstavnika iste države, ki sedita drug poleg drugega.

2. Na vsakem področju tabele velikosti 25×25 je zapisana ena od številk $+1$ ali -1 (na poljuben način). Pod vsakim stolpcem je zapisan produkt vseh številk v stolpcu, in na desni strani vsake vrstice je zapisan produkt vseh številk v tej vrstici. Dokaži, da vsota vseh 50-tih produktov ni enaka 0.

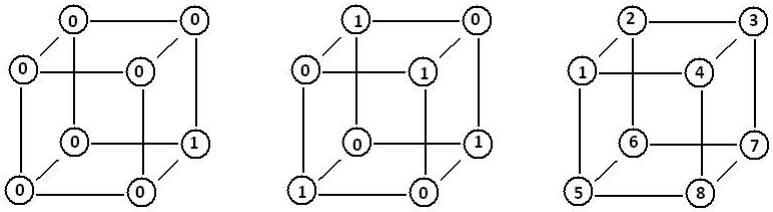
3. Lesena deska velikosti 9×10 je pokrita z dominami velikosti 2×1. Dokaži, da se deska ne more pokriti tako, da se vsaka domina, ki je bila prej postavljena navpično, zdaj postavi vodoravno, in vsaka domina, ki je bila prej postavljena vodoravno, zdaj postavi navpično.

4. Ali je mogoče pobarvati področja tabele 2010×2010 s črno in belo barvo tako, da so polja, ki so simetrična glede na sredino tabele, drugače barve, in da je v vsaki vrstici in vsakem stolpcu enako število črnih in belih polj?

5. Lesena deska velikosti 6×6 je v celoti pokrita z 18 dominami velikosti 2×1. Dokaži, da obstaja premica, vzdolž katere lahko presekamo desko tako, da ne presekamo nobene domine.

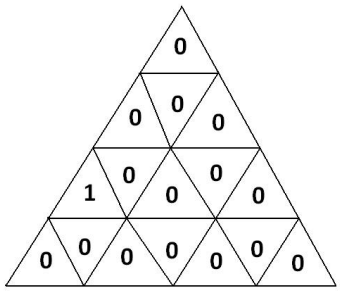
6. Dana je kocka z robom dolžine 4 enote. Ali lahko tri stranice kocke s skupnim ogliščem v celoti pokrijemo s 16-timi papirnatimi trakovi dimenzije 1×3?

7. V vsakem oglišču kocke je vpisano število. V enem koraku je mogoče prišteti ali odšteti število 1 številkama, ki sta na istem robu kocke. Ali je mogoče v nekaj korakih doseči, da so vse številke enake, če je prvotni položaj takšen, kot na slikah spodaj?



8. Dana množica točk v prostoru se povečuje korak za korakom tako, da za poljubno točko naredimo centralno simetrično točko glede na neko drugo točko množice in potem dodamo to novo točko v množico. Ali je mogoče, začenši s sedmimi oglišči kocke, v končnem številu korakov doseči, da tudi osmo oglišče kocke postane element množice?

9. Enakostranični trikotnik s stranico dolžine 4 je razdeljen na 16 enakostraničnih trikotnikov s stranico dolžine 1. V vsak manjši trikotnik je vpisano število, kot je prikazano na sliki. Dovoljeno je istočasno prišteti ali odšteti 1 od vrednosti, ki so vpisane v trikotnike v pasu med dvema sosednjima premicama, vzporednima neki stranici trikotnika. Ali lahko z uporabo končnega števila takšnih operacij dosežemo, da je v vseh 16-tih manjših trikotnikih vpisano isto število?



Nespremenljivost in monotonost

10. Naj bo delfin figura, ki se lahko na šahovnici premakne za eno polje navzgor, za eno polje v desno ali za eno polje diagonalno levo navzdol. Ali lahko delfin, začenši v spodnjem levem kotu šahovnice, obišče natanko enkrat vsako polje in se v naslednjem koraku vrne na začetno polje? Ali lahko obišče natanko enkrat vsako polje in obisk konča v zgornjem desnem kotu šahovnice?

11. Na otoku je 69 kameleonov: 25 rdečih, 23 zelenih in 21 modrih. Ti se potikajo po otoku in se občasno srečujejo. Na vsakem srečanju sta prisotna samo dva kameleona. Če se srečata dva kameleona iste barve, njuna barva ostane nespremenjena. Če pa se srečata dva kameleona različne barve, spremenita svoji barvi v tretjo barvo (na primer, če se srečata rdeči in zeleni kameleon, nato spremenita barvi v modro). Ali se lahko zgodi, da so nekega trenutka vsi kameleoni na otoku enake barve?

12. V pravokotni tabeli, sestavljeni iz n vrstic in $m > n$ stolpcev so zapisane zvezdice, tako da ima vsak stolpec vsaj eno zvezdico. Dokaži, da je mogoče najti zvezdico, za katero velja, da je v njeni vrstici več zvezdic kot v njenem stolpcu.

13. V parlamentu ima vsak delegat največ tri sovražnike. Dokaži, da lahko razporedimo delegate v dva doma tako, da je z vsakim delegatom hkrati v istem domu največ eden od njegovih sovražnikov. Sovražnost je medsebojna relacija.

14. V Smaragdnem gozdu živi 12 palčkov. Palčki nosijo dežne plašče, ki so na eni strani modre in na drugi strani rdeče barve. Na Božični skupščini so odločili, da n-ti dan novega leta n mod 12 palček obišče vse svoje prijatelje. Če ima več kot polovica teh drugačno barvo plašča, palček spremeni barvo svojega plašča. Dokaži, da čez nekaj časa palčki prenehajo spremenjati barve svojih plaščev.

15. Na nekaterih področjih tabele velikosti 10 x 10 je zrasel plevel. Plevel se širi na naslednji način: če sta vsaj dva sosednja polja nekega polja porasla s plevelom, se plevel razširi tudi na to polje. Kaj mislite, ali lahko plevel pokrije vso tabelo, če je na začetku le 9 polj poraslih s plevelom?