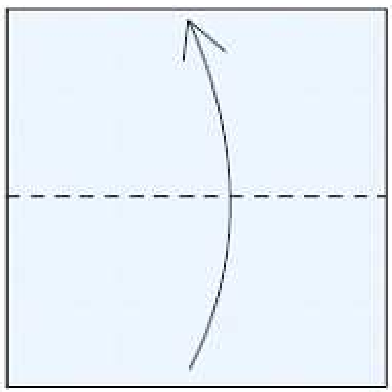
ORIGAMI!

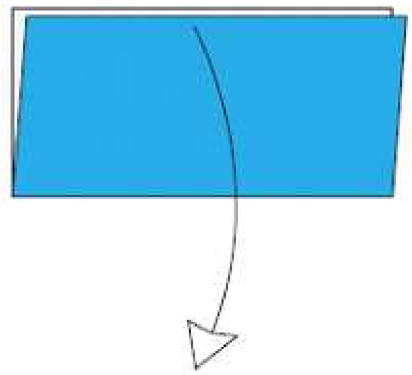
ori = “prepogibati", *kami* = "papir”

Začetki: Japonska 7 stoletje.

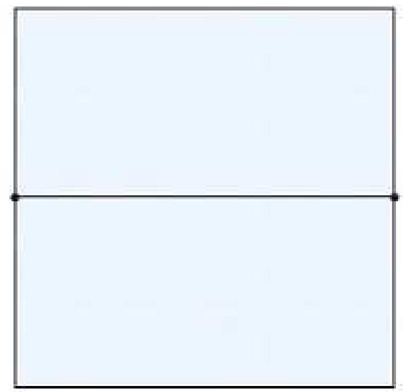
Osnovno pravilo origamija



1.Prepogni spodnji rob na zgornji rob

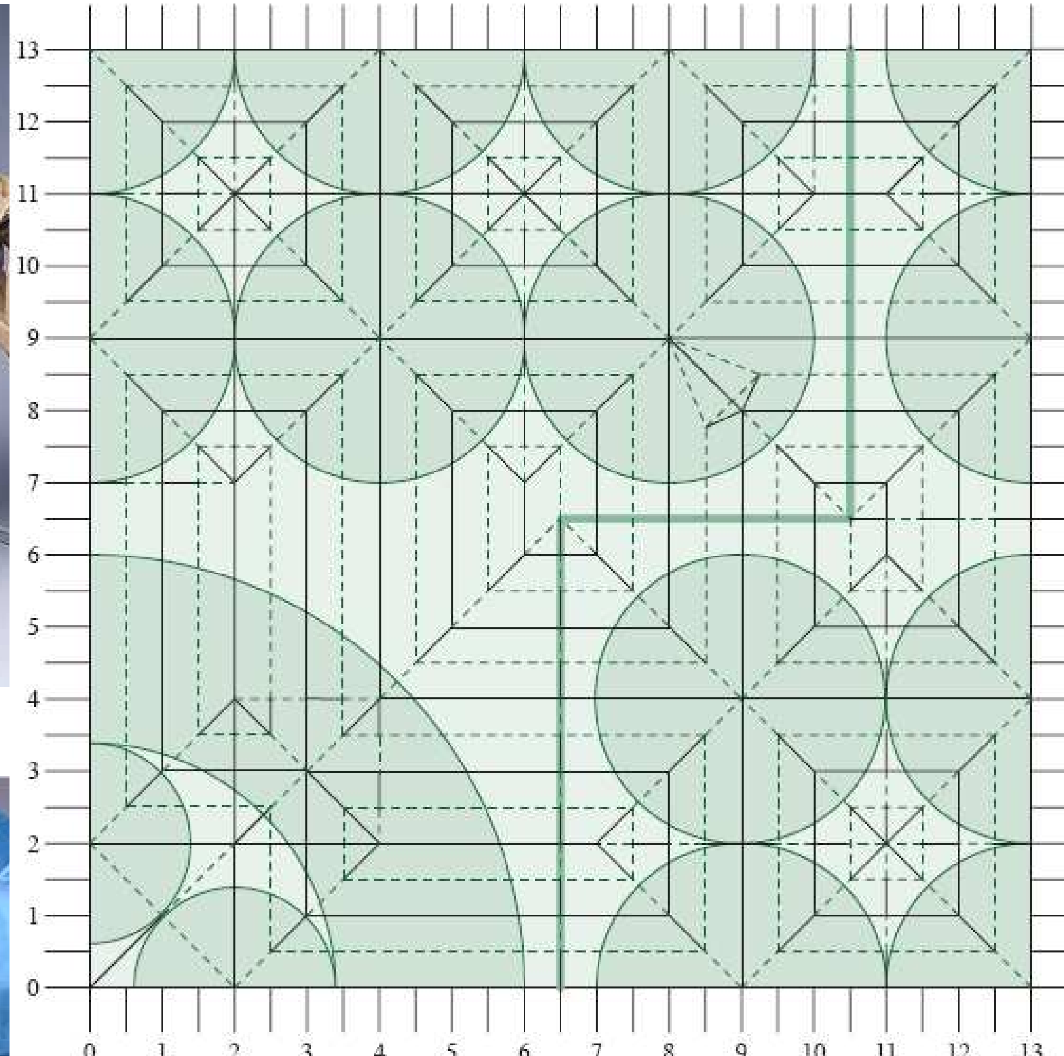


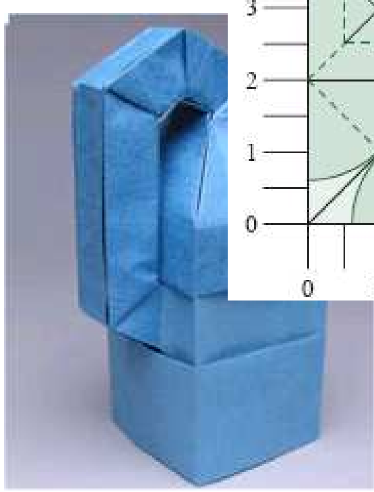
2. razgrni

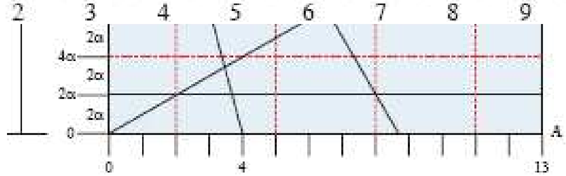


3.Nov pregib določa dve novi točki

ORIGAMI


13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

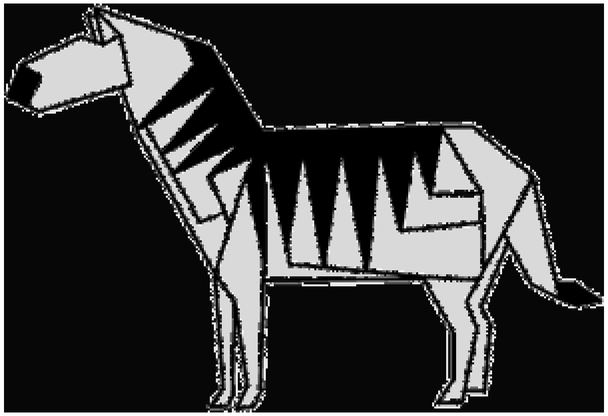



2α
4α
2α
2α
2α
0
A
0
4
13

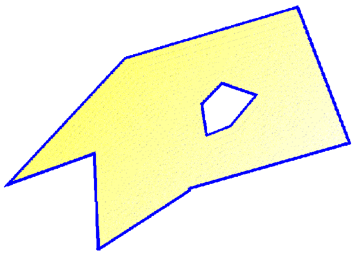
ORIGAMI

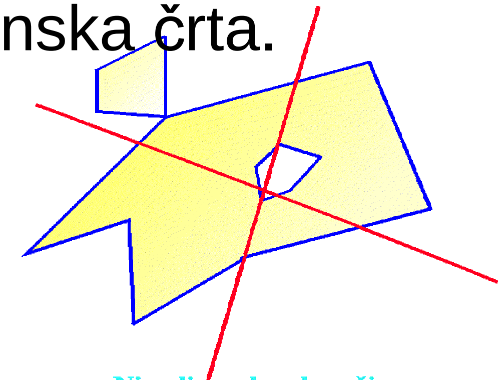
Kaj vse lahko konstruiramo z origamijem?

Izrek (M. Demaine, J. Mitchell, E. Demaine, 2000). Bodi P poljuben povezan (lahko tudi nekonveksen) polieder, ki ima vsako lice pobarvano z eno izmed dveh barv. Tedaj lahko zgubamo dvobarvni kvadratni kos papirja tako, da se bo zgubal natanko na polieder P, in se bo pri tem na vsakem licu pokazala predpisana barva papirja.

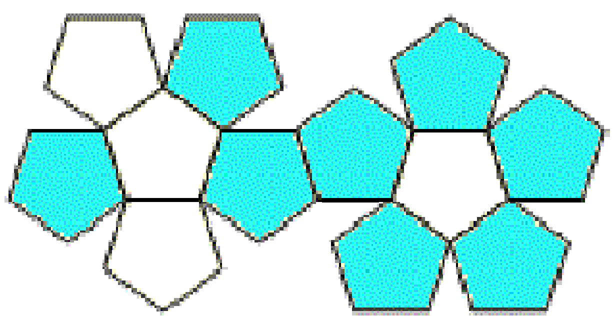


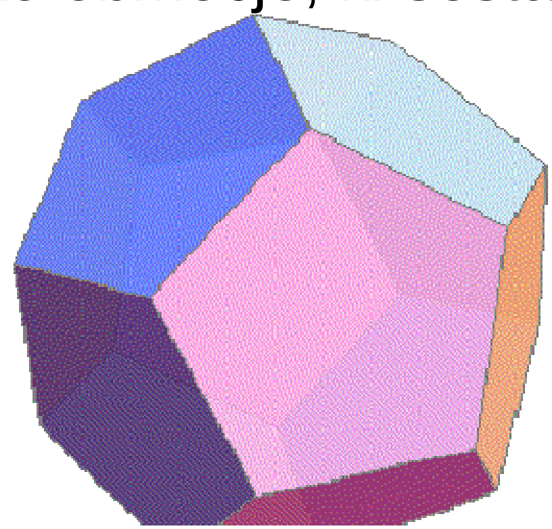
•**Definicija**. *Poligonsko območje* je povezan ravninski lik, katerega rob je poligonska črta.



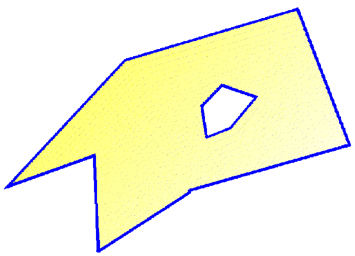


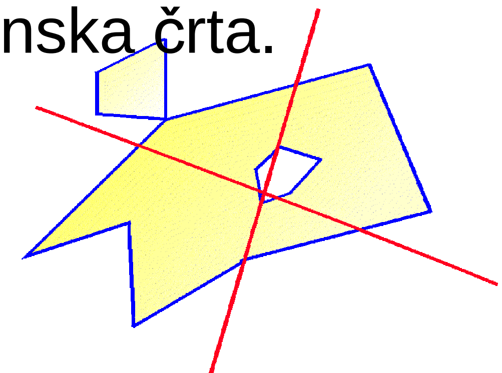
•**Definicija**. *Polieder P* je povezana unija končno mnogo poligonskih območij s paroma disjunktnimi notranjostmi. Vsako poligonsko območje, ki sestavlja P, imenujemo *lice*.





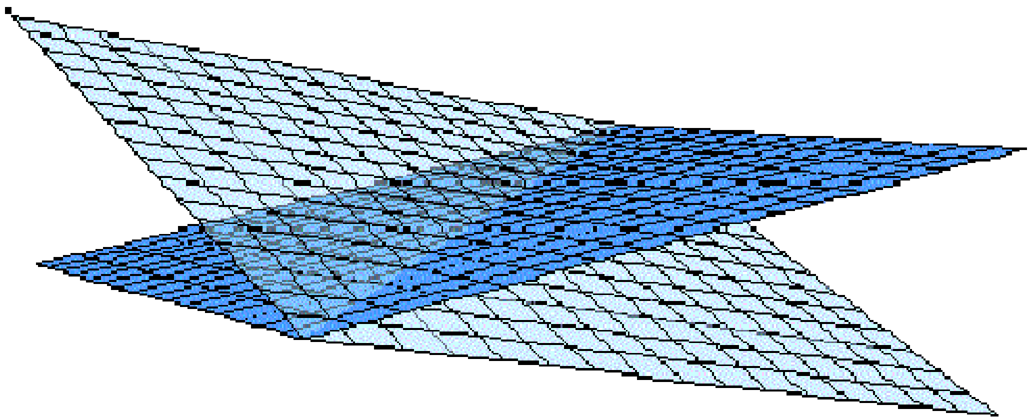
- **Definicija**. *Poligonsko območje* je povezan ravninski lik, katerega rob je poligonska črta.





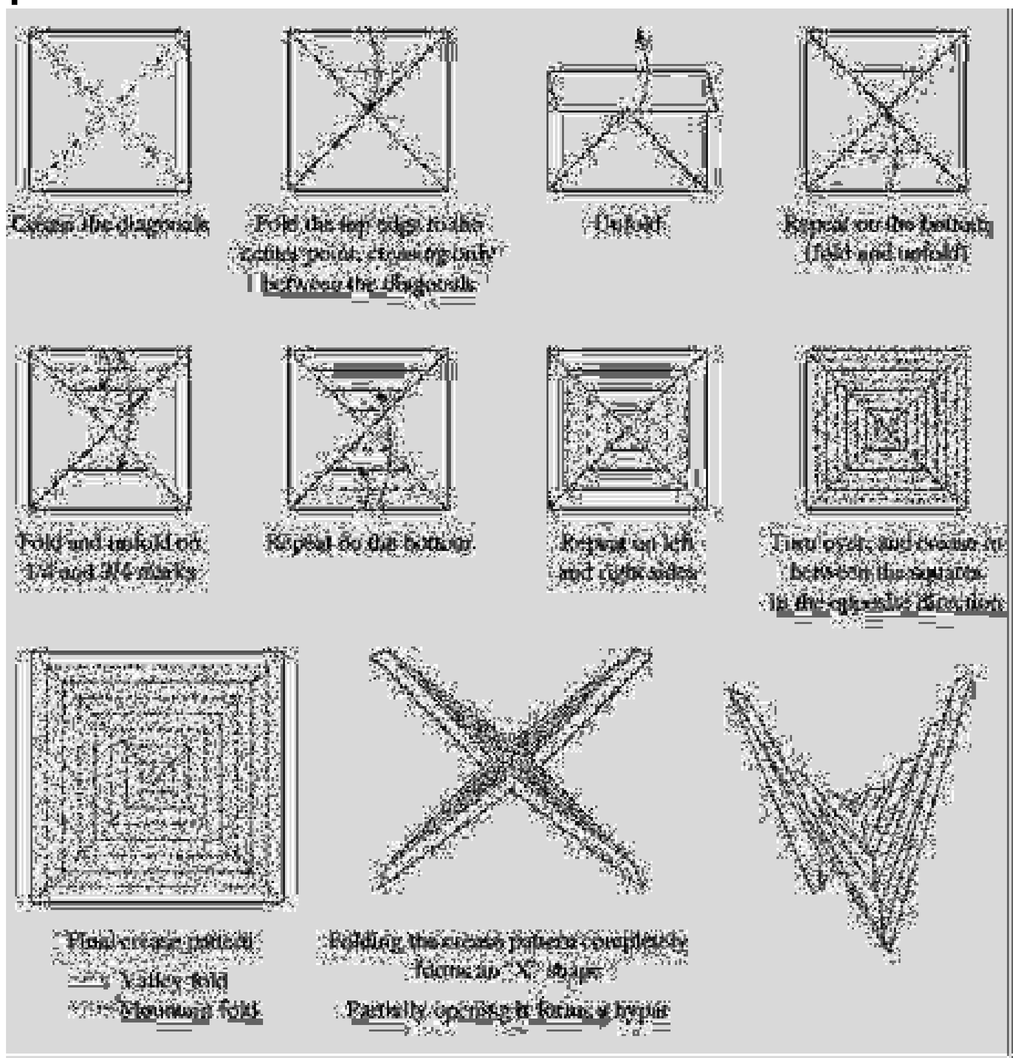
Ni poligonsko območje

- **Definicija**. *Polieder P* je povezana unija končno mnogo poligonskih območij s paroma disjunktnimi notranjostmi. Vsako poligonsko območje, ki sestavlja P, imenujemo *lice*.



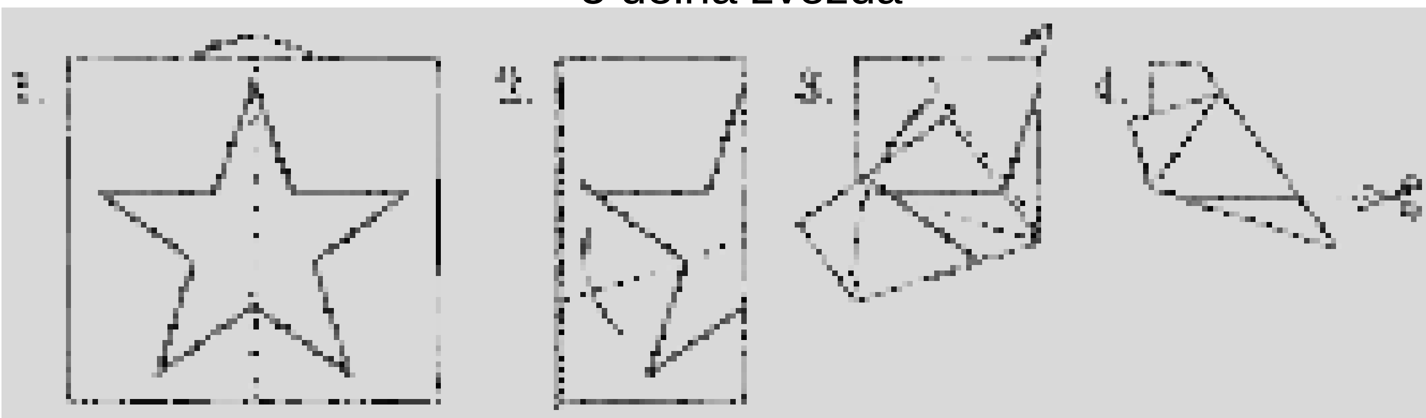
Kaj vse lahko konstruiramo z origamijem?

- Hiperbolični paraboloid (Demain, Demain, Lubiw 1999)

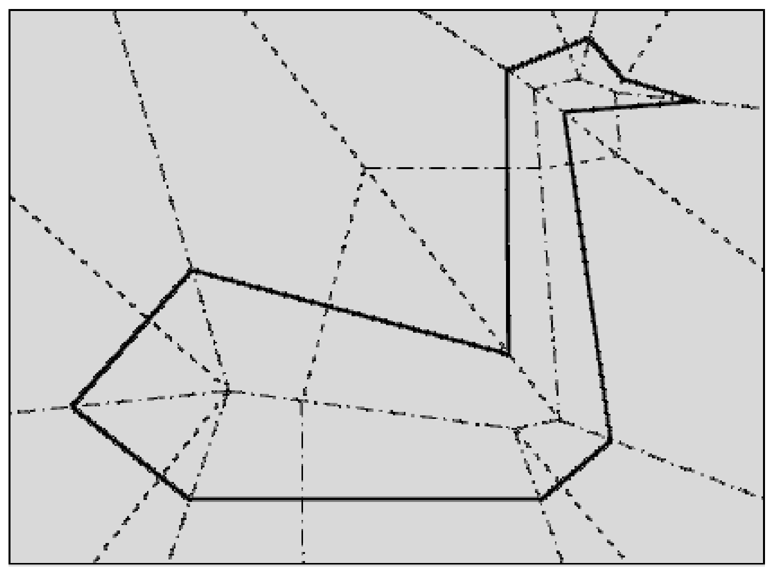


Prepogni in izreži:

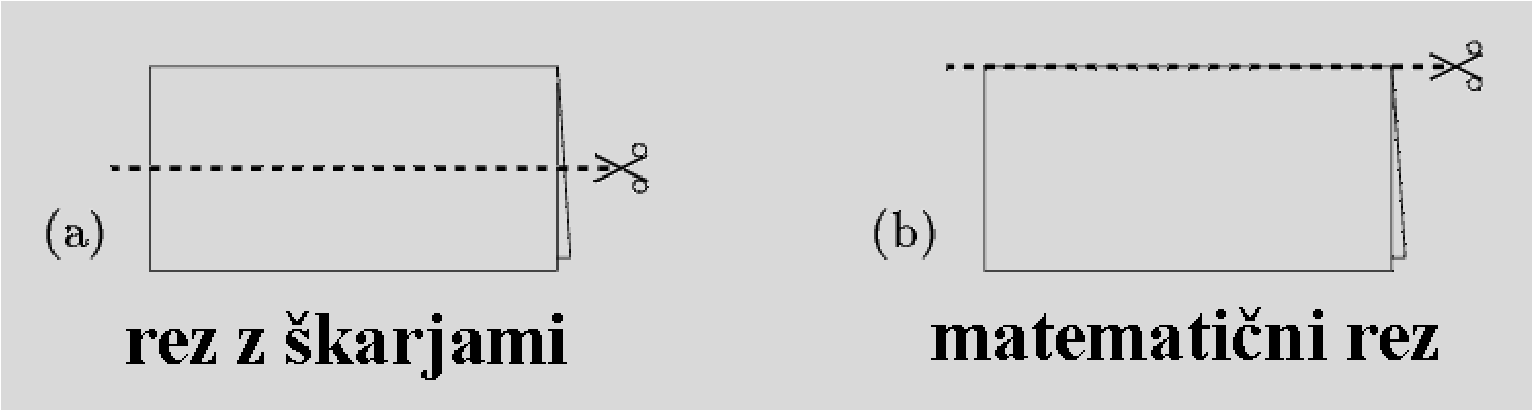
5 delna zvezda



Labod

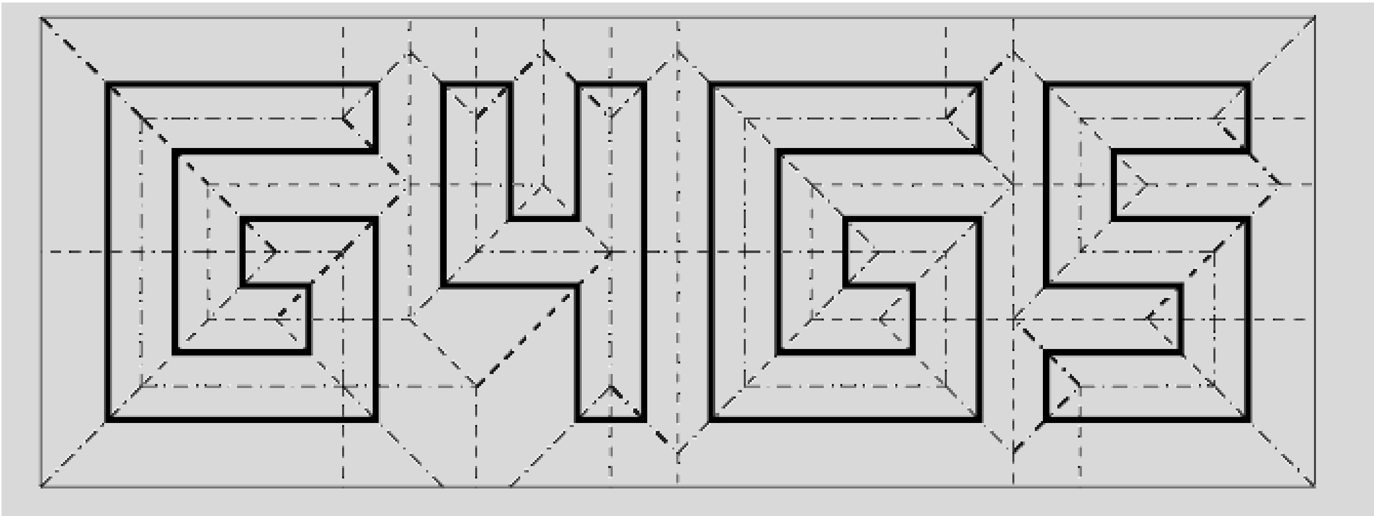


•**Prepogni in izreži:**

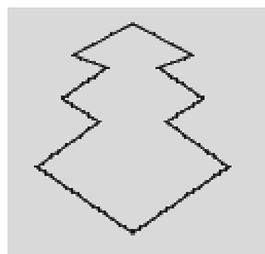


Izrek (E. D. Demaine, M. L. Demaine, A. Lubiw 1999). Bodi G poljuben ravninski graf (lahko tudi nepovezan) na kvadratu. Denimo še, da so oglišča v G povezana zgolj z daljicami.
Tedaj lahko v končno mnogo korakih zgubamo kvadrat tako, da z matematičnim rezom vzdolž ene same premice odstranimo natanko vse povezave grafa G in čisto nič drugega več.

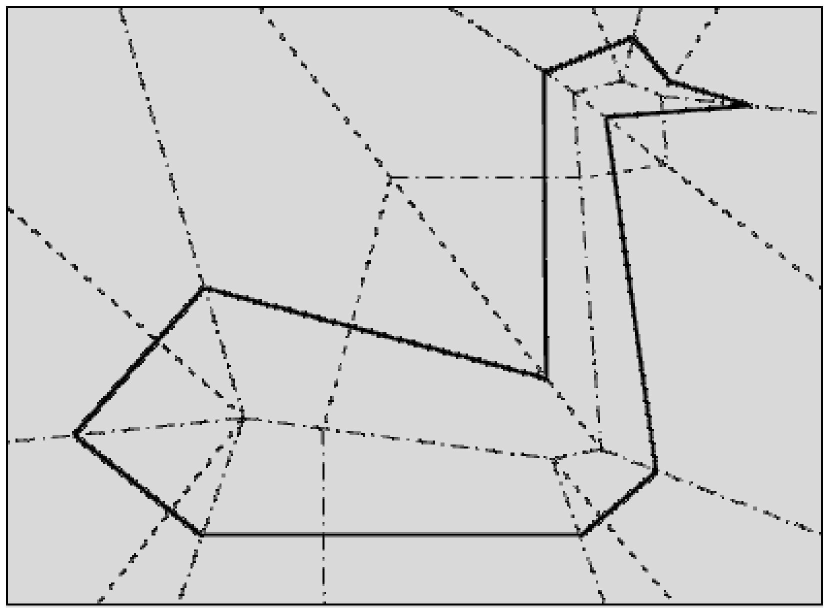
•**Prepogni in izreži:**



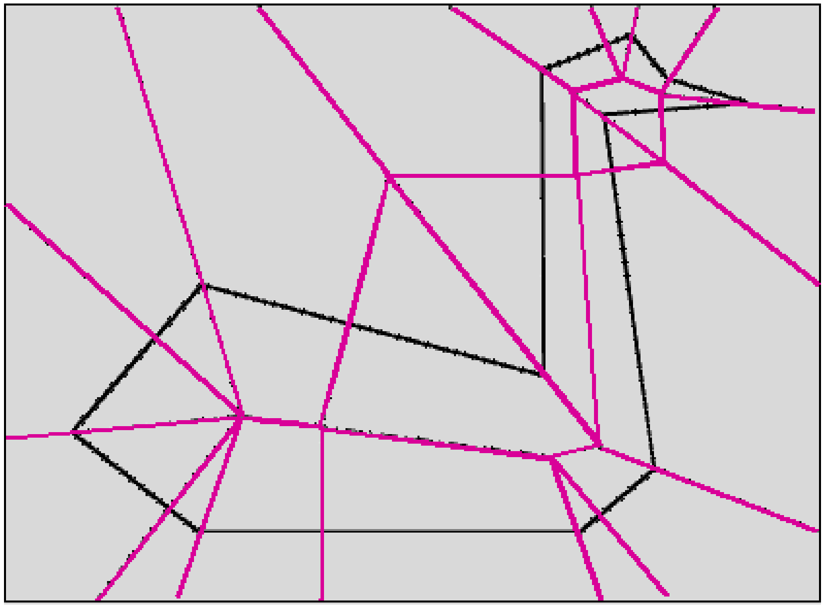
Kan-Chu-Sen (1721): Izreži “sangaibisi”



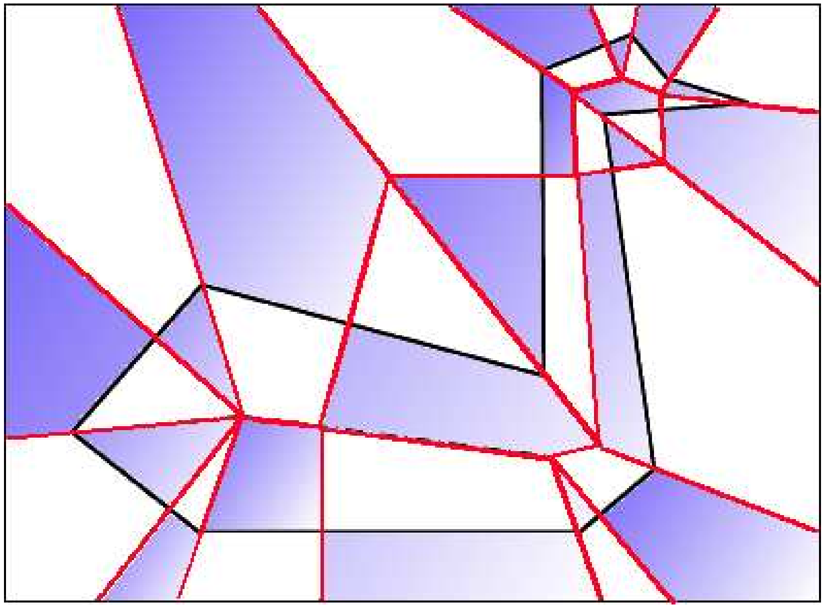
•**Vzorec gub in barvanje zemljevidov**



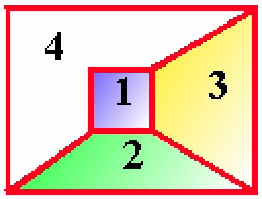
- **Vzorec gub in barvanje zemljevidov**



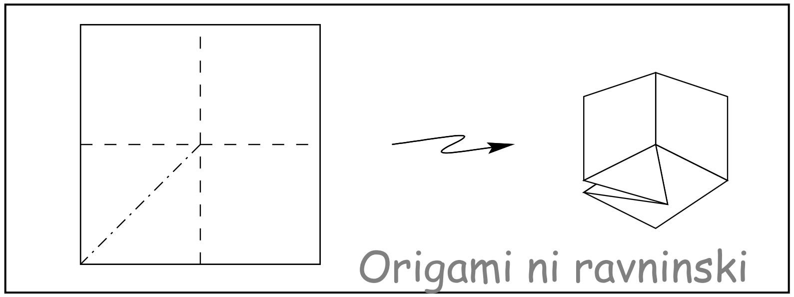
•**Vzorec gub in barvanje zemljevidov**

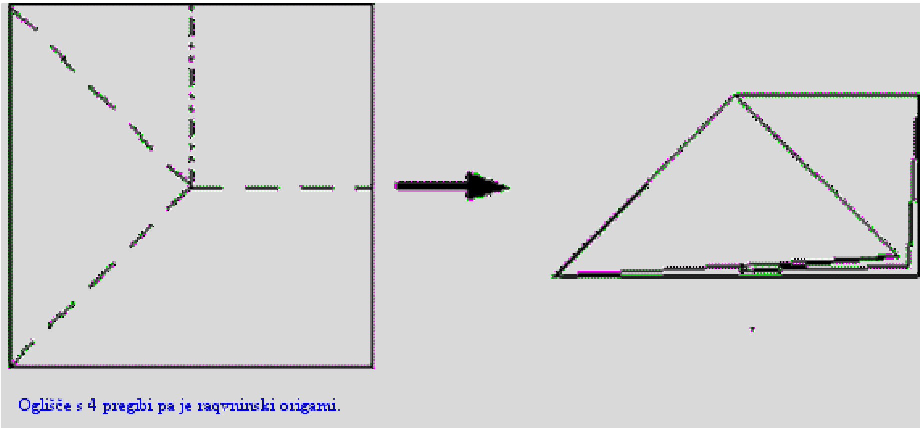


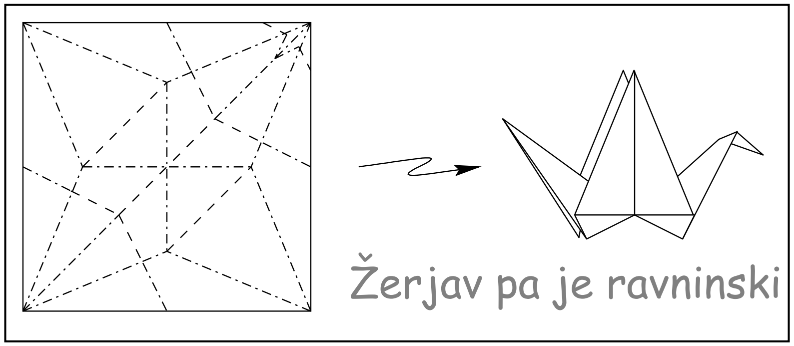
Za pobarvanje poljubnega zemljevida v R^2 rabimo vsaj 4 barve.

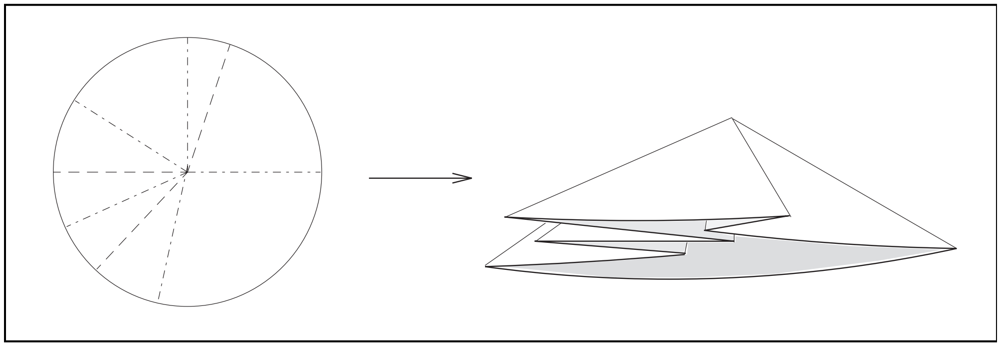


- **Ravninski origami**



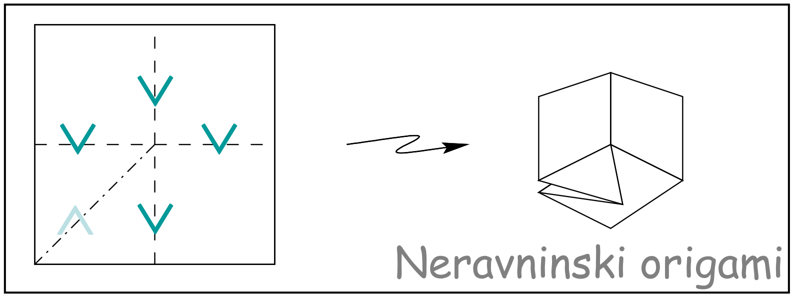


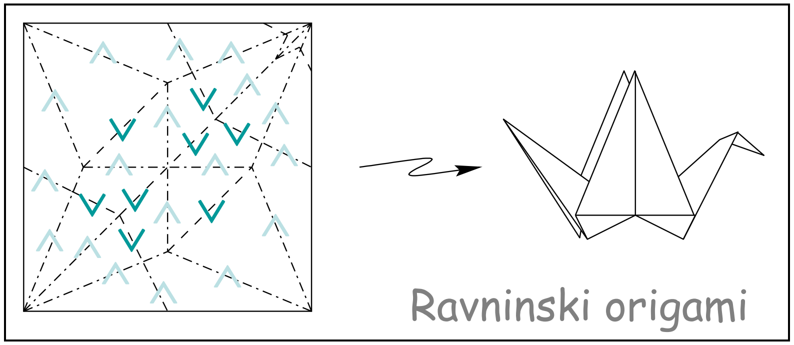




Struktura pregibov

- **Hrib** $\wedge$
- Dolina $\vee$

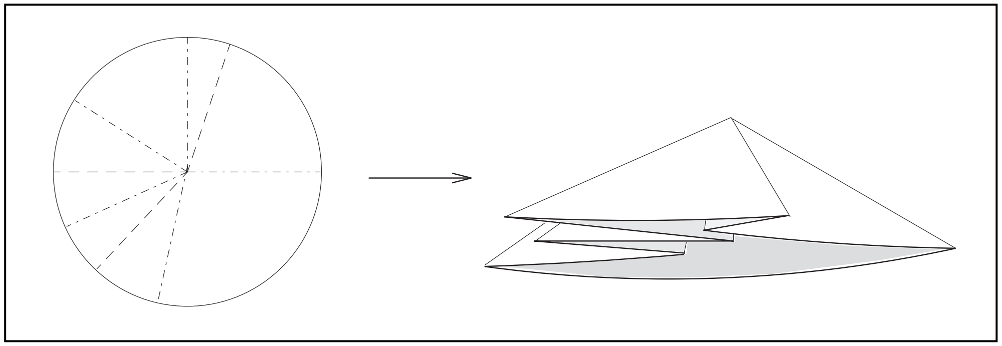




Kopirano iz Joseph O'Rourke, http://www.gfalop.org/StMarys.2a.ppt

ORIGAMI

- **Kdaj je origami z enim samim ogliščem ravninski ?**



Izrek (Maekawa) Če je origami z enim samim ogliščem ravninski, je

$$|\#\ \text{hrib} - \#\ \text{dolina}| = 2$$

DOKAZ. Mravlja gre na obhod.

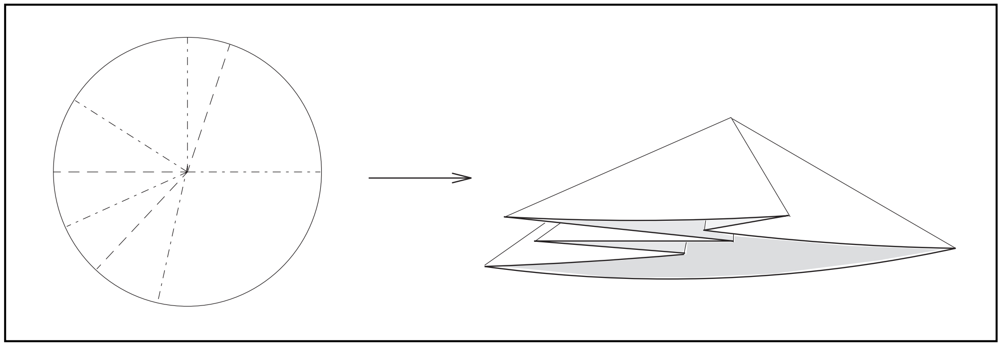
hrib = 180°, dolina = - 180°

$$\pm 360° = 180° \times (\#\ \text{hribov}) - 180° \times (\#\ \text{dolin})$$

Kopirano iz Joseph O'Rourke, http://www.gfalop.org/StMarys.2a.ppt

ORIGAMI

- **Kdaj je origami z enim samim ogliščem ravninski ?**



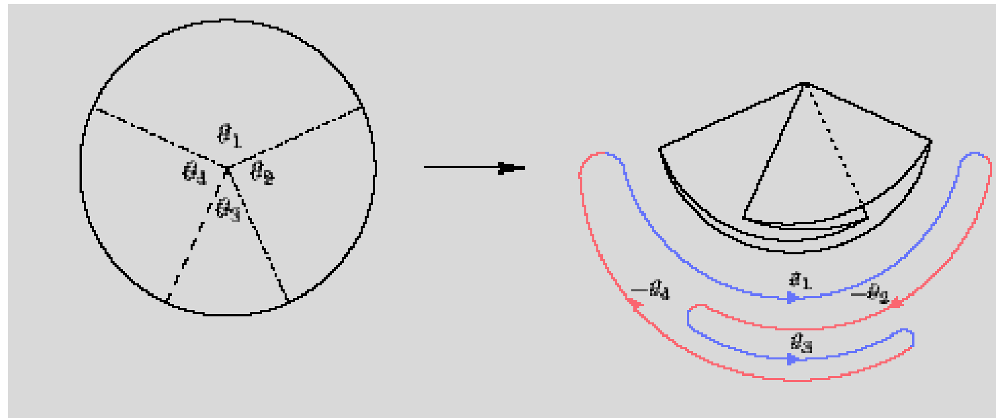
Posledica. Če je origami z enim samim ogliščem ravninski, je število daljic sodo.

DOKAZ Število daljic = (# hribov) + (# dolin)

= (# hribov) + (# hribov + 2)

ORIGAMI

- **Kdaj je origami z enim samim ogliščem ravninski ?**



Izrek (Kawasaki). Origami z enim samim ogliščem je ravninski natanko tedaj, ko:

iz oglišča poteka sodo mnogo daljic, koti med njimi pa ustrezajo

$\Theta_1 + \Theta_3 + \ldots + \Theta_{n-1} = \Theta_2 + \Theta_4 + \ldots + \Theta_n$

DOKAZ:

–Mravljina senca pri obhodu okoli tega oglišča naredi pot

$\Theta_1 - \Theta_2 + \Theta_3 - \Theta_4 + \ldots + \Theta_{n-1} - \Theta_n$

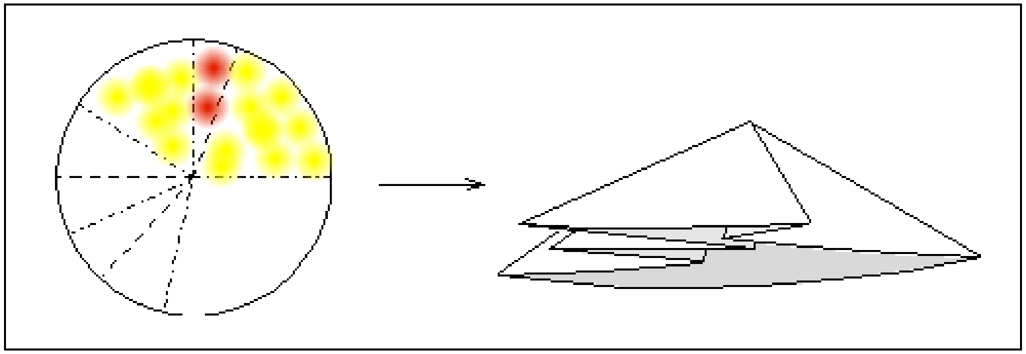
–Vrne se na izhodišče $\Rightarrow$ vsota = 0

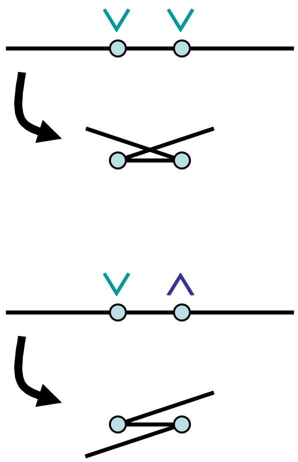
Kopirano iz Joseph O'Rourke, http://www.gfalop.org/StMarys.2a.ppt

ORIGAMI

Lema. (Kawasaki-Justin za ravninske origamije):
Če je nek kot manjši kot njegova soseda, se morata robova tega kota zgubati v različnih smereh.

➢**Drugače bi se večja kota** zaletela.

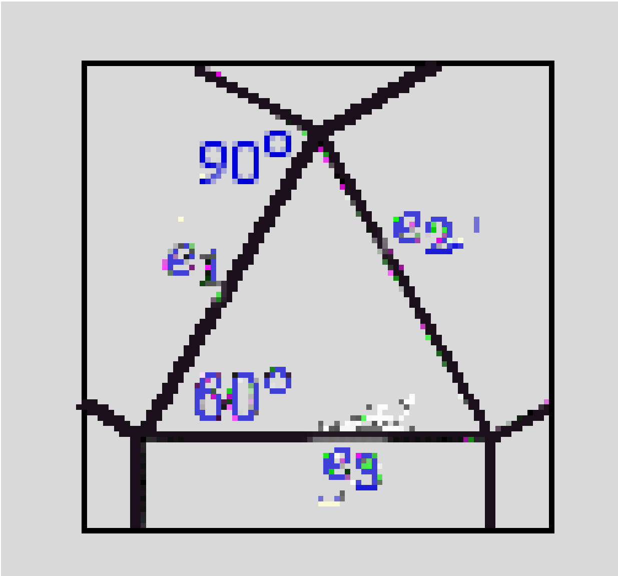




Kopirano iz Joseph O'Rourke, http://www.gfalop.org/StMarys.2a.ppt

ORIGAMI

- **Origami, ki je samo lokalno ravninski, a ni globalno**



Dokaz. ★ $\measuredangle(e_1, e_2) = 60° < 90°$, torej se eden od e_1, e_2 zguba v hrib, drugi v dolino.

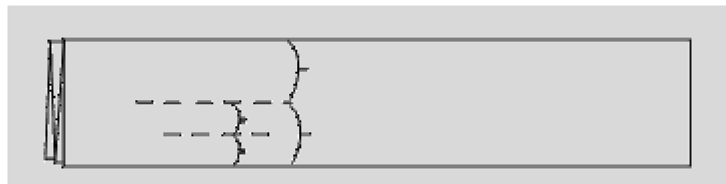
★ Podobno velja za e_2 in e_3 ter za e_3 in e_1—protislovje.

Kopirano iz Joseph O'Rourke, http://www.gfalop.org/StMarys.2a.ppt

ORIGAMI (Koryo Miura zlaganje zemljevida)

Kos papirja zgubaj
v hramoniko na ¼ dolžine

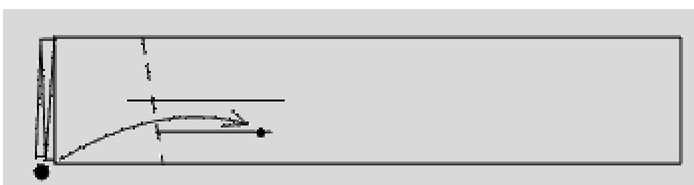
→



Naredi oznake na ½ in ¼ kakor prikazano

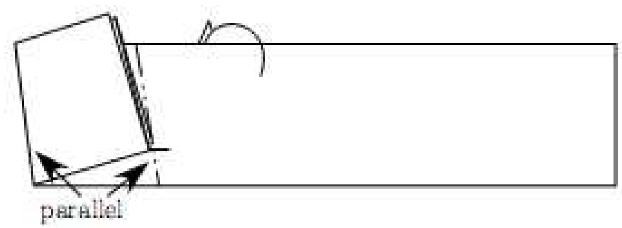
→

→



Prepogni VSE plasti tako da
spodnji kot preneseš na ¼ oznake

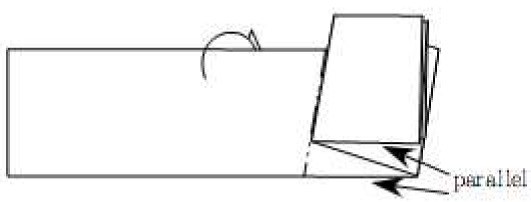
→



Prepogni preostanek
v drugo smer nazaj, da dobiš rob
vzporeden prejšnjemu

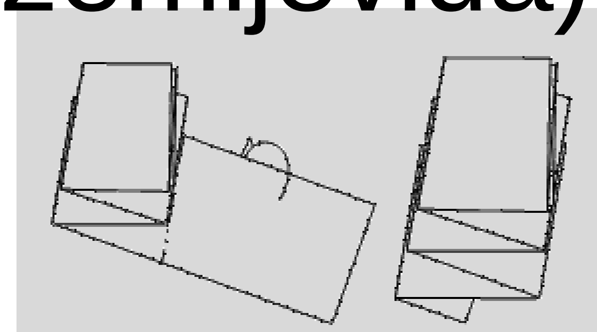
Kopirano iz Joseph O'Rourke, http://www.gfalop.org/StMarys.2a.ppt

ORIGAMI (Koryo Miura zlaganje zemljevida)



Ponovi, le da tokrat uporabiš prvi prepogib kot vodilo.

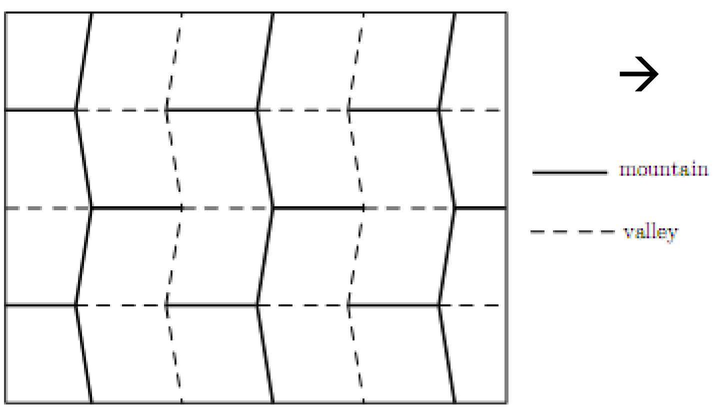
→



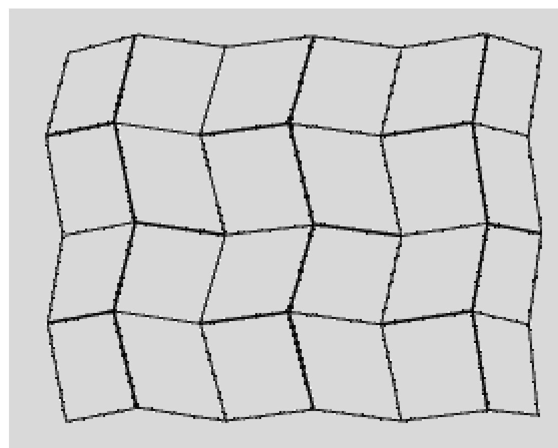
Ponavljaj dokler gre.

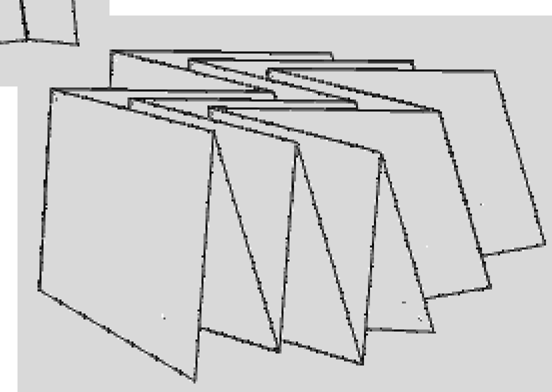
→

→



→



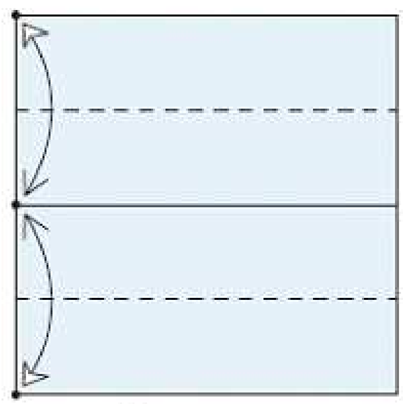


Razgrni. Dobiš vzorec kot zgoraj.
Nato nekatere hribe spremeniš v doline in obratno.

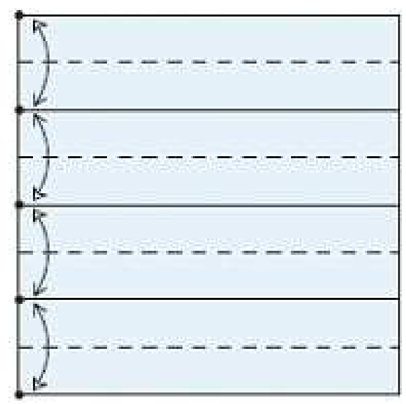
Kopirano iz http://kahuna.merrimack.edu/~thull/combgeom05/handout7.pdf

ORIGAMI-RAČUNANJE

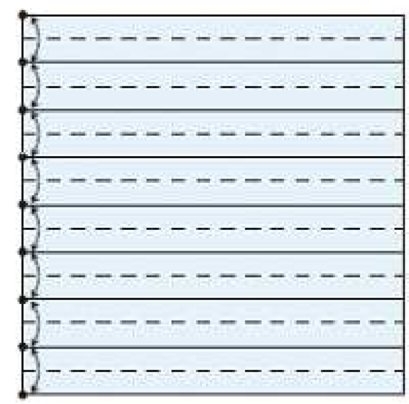
Z origamijem preprosto razpolavljamo dolžine



Razdelitev na 4 dele

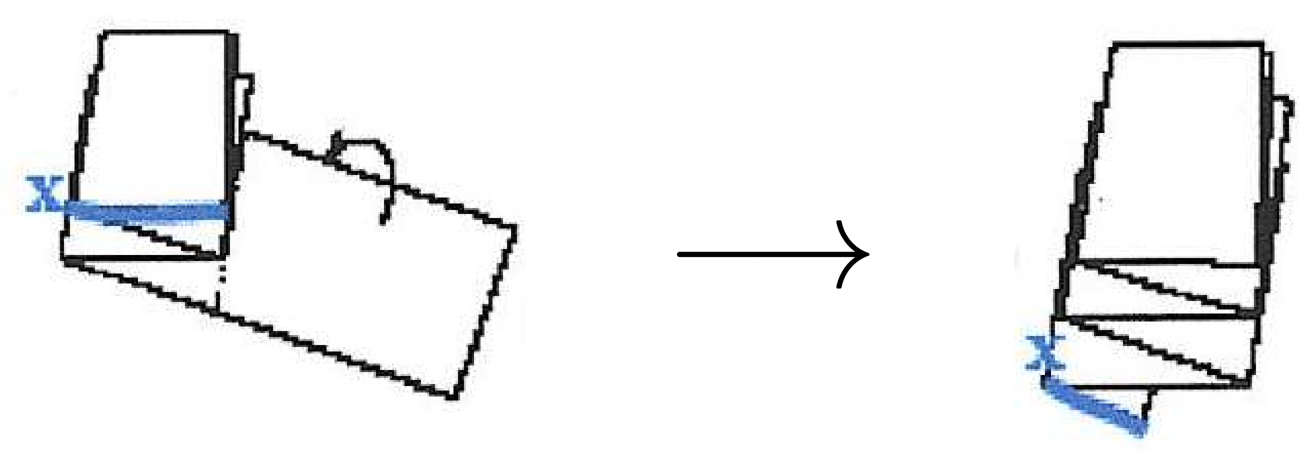


Razdelitev na 8 delov



Razdelitev na 16 delov

Z origamijem preprosto podvajamo dolžine



Lahko pa tudi konstruiramo ulomke dane dolžine

(konstrukcijo odkril Kazuo Haga)

$$z = \frac{2x}{1+x} \text{ and } w = \frac{z}{2} = \frac{x}{1+x}$$

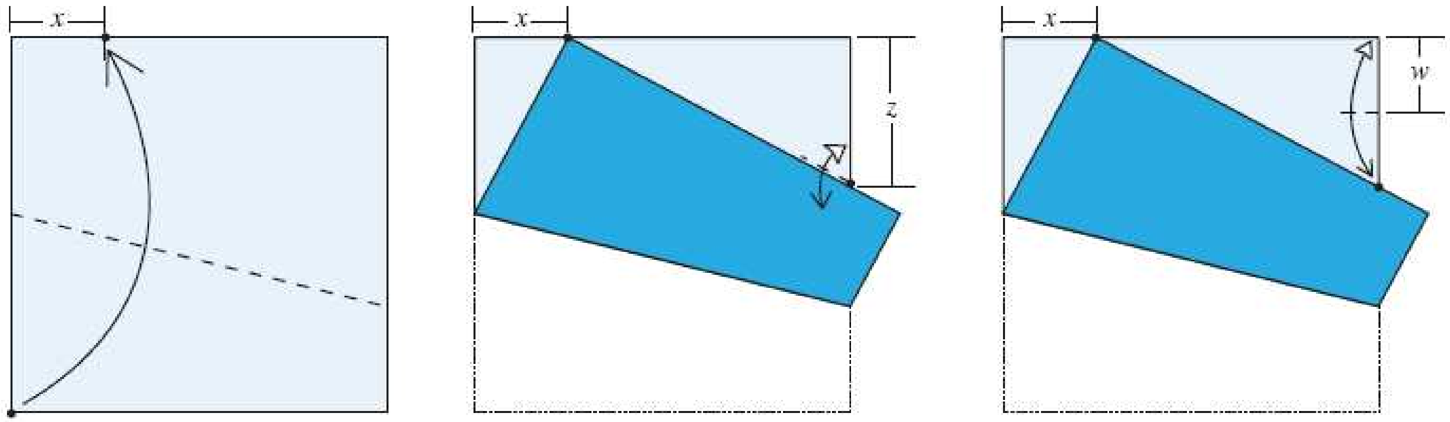


Figure 15. Schematic of the general Haga construction.

Kako konstruirati poljubni ulomek $\frac{a}{b}$?

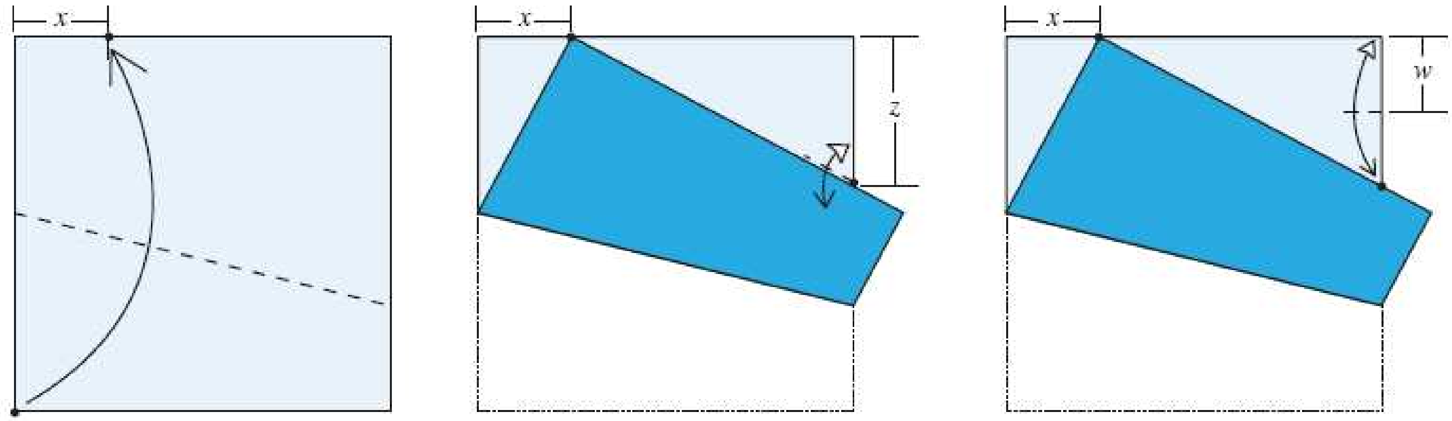
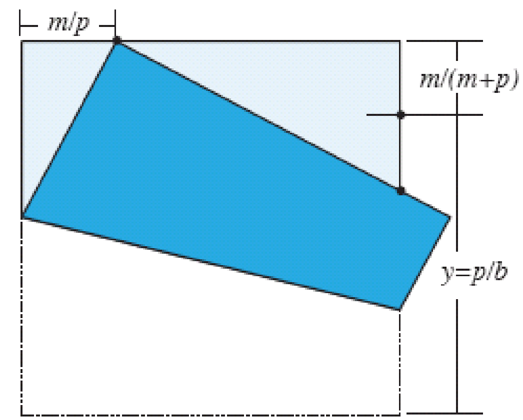
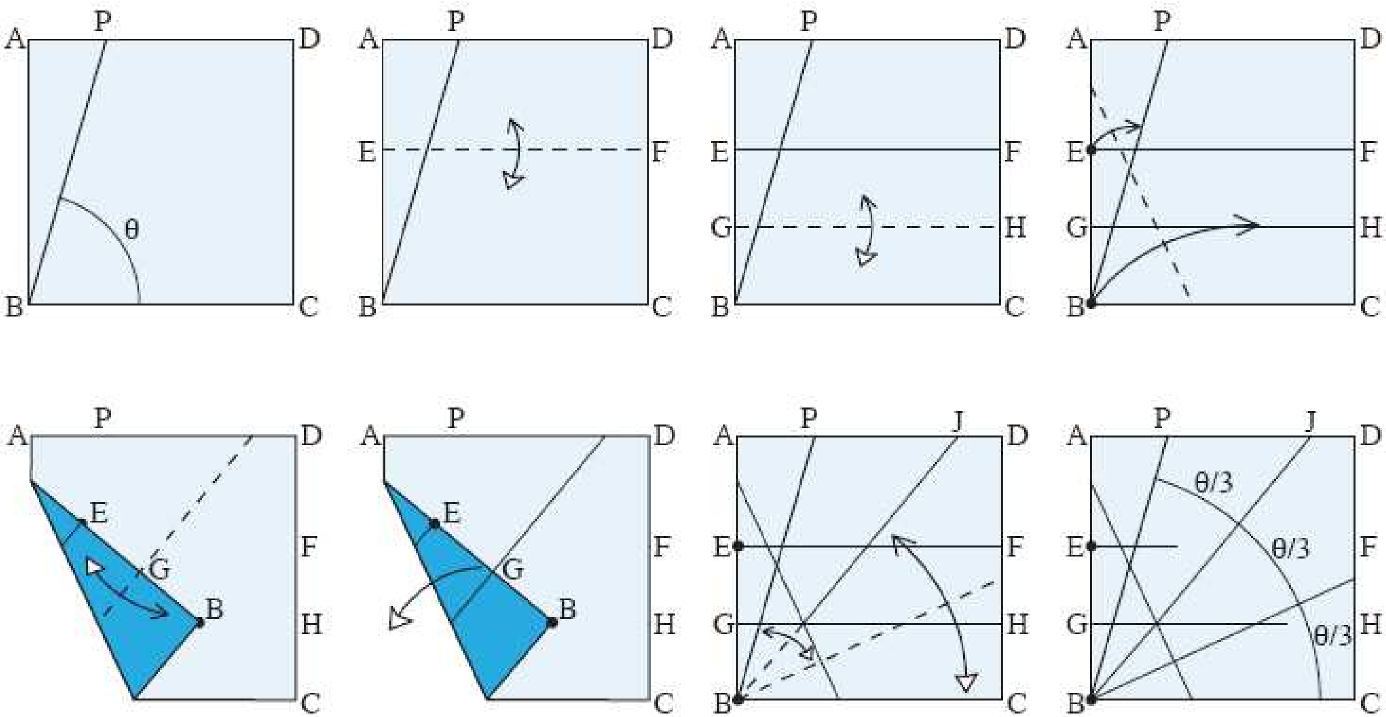


Figure 15. Schematic of the general Haga construction.



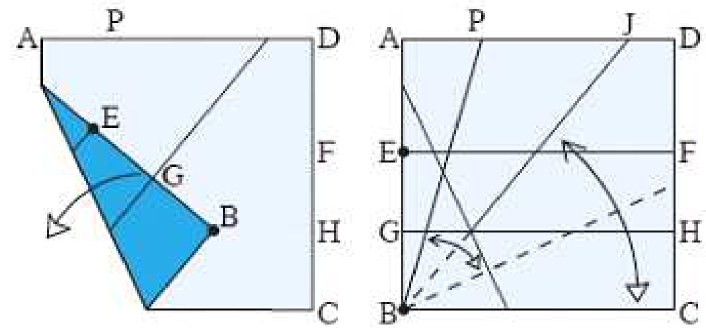
- ★ Poišči število n, da bo $p := 2^n \leq b < 2^{n+1}$
- ★ Bodi $m := b - p = b - 2^n$
- ★ Z razpolavljanjem poišči $\hat{x} = \frac{1}{2^n}$.
- ★ S harmoniko poišči $x = (b - 2^n)\hat{x} = \frac{b-2^n}{2^n} = \frac{b}{2^n} - 1$
- ★ S pomočjo Haga konstrukcije poišči $w = \frac{x}{1+x}$ $(= 1 - \frac{2^n}{b})$
- ★ Število $1 - w = \frac{2^n}{b}$ razpolavljaj, da prideš do $\frac{1}{b}$.
- ★ S harmoniko prideš do ulomka $\frac{a}{b}$.

Lahko pa tudi naredimo nekaj, kar se ne da z ravnilom in šestilom…



Trisekcija kota z origamijem (Tsune Abe)

Dokaz, da smo res dobili 1/3 kota:



✓Daljica G'B' = GB = B'D (zakaj?)

✓Daljica GS = SG' in BS = SB'

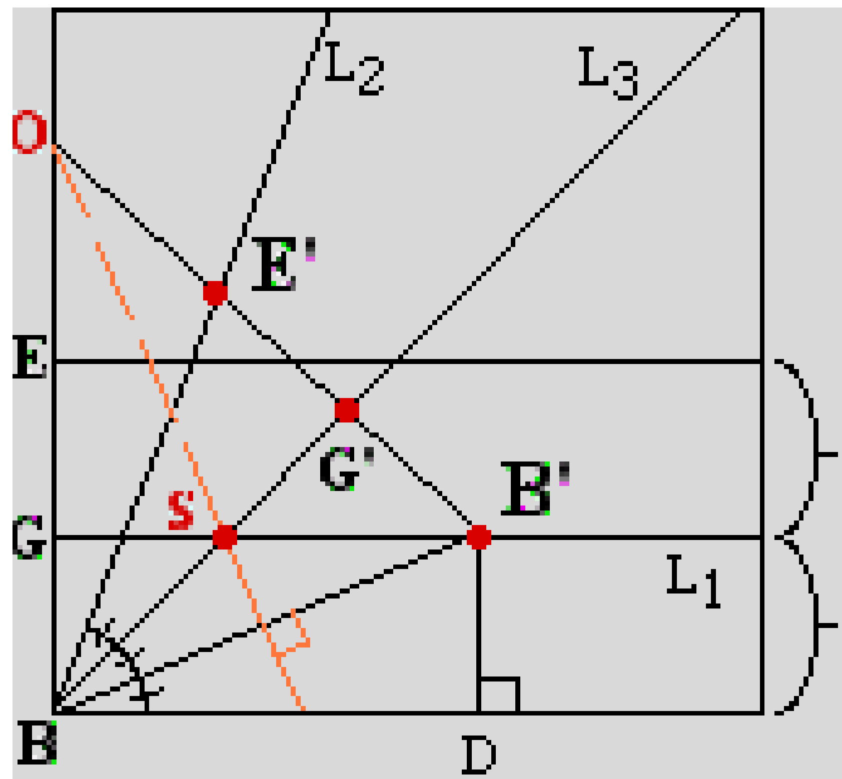
✓Sledi, da trikotnik GSB = G'SB'

✓Torej kot GSB = G'SB', in s tem kot BSG' = 180^{o} oziroma, točka S leži na daljici BG'.

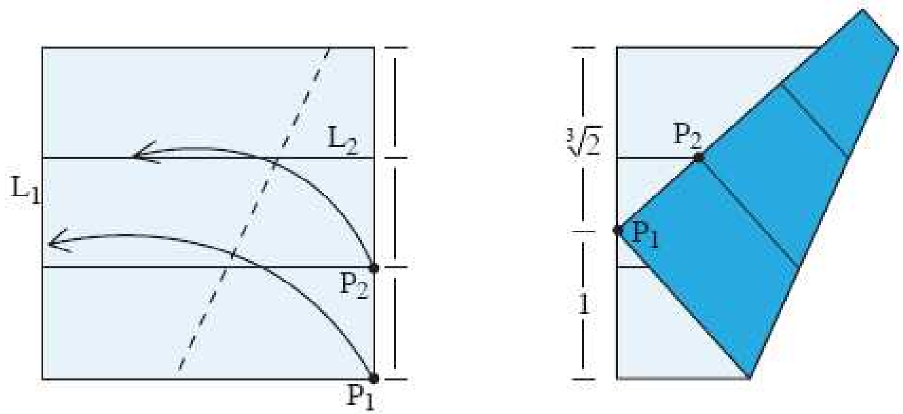
✓Kot SG'B' = SGB = 90^{o} = BG'B'

✓Sledi, da trikotnik E'BG' = G'BB' = B'BD (zakaj?)

✓Torej so koti E'BG, G'BB', B'BD enaki.



In še nekaj lahko naredimo, kar se tudi ne da z ravnilom in šestilom…

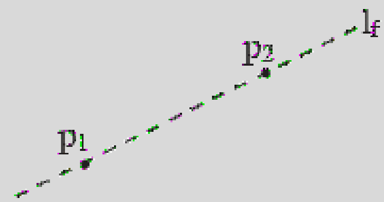


Podvojitev kocke z origamijem oziroma: $\sqrt[3]{2}$ (Peter Messer)

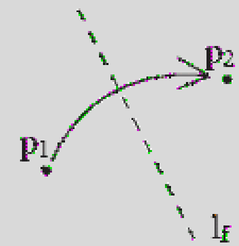
Axiomi origamija

(Hurizita)

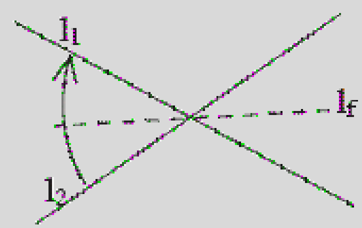
(O1) Given two points p_1 and p_2, we can fold a line connecting them.



(O2) Given two points p_1 and p_2, we can fold p_1 onto p_2.

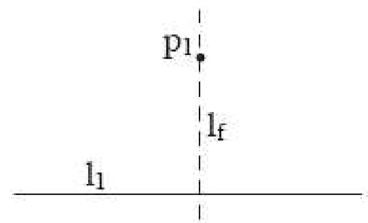


(O3) Given two lines l_1 and l_2, we can fold line l_1 onto l_2.

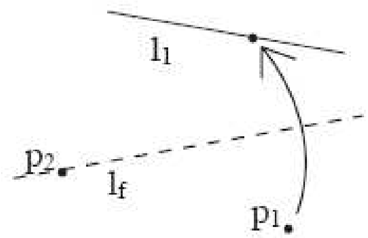


Axiomi origamija (nadaljevanje)

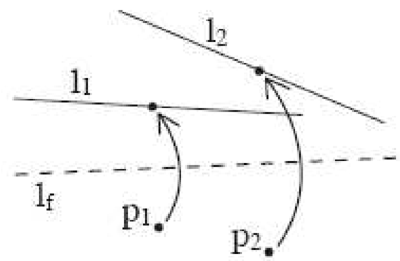
(O4) Given as point p_1 and a line l_1, we can make a fold perpendicular to l_1 passing through the point p_1.



(O5) Given two points p_1 and p_2 and a line l_1, we can make a fold that places p_1 onto l_1 and passes through the point p_2.

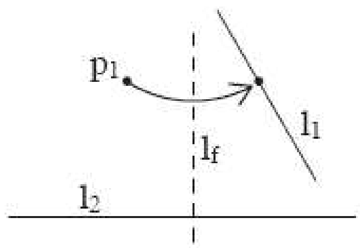


(O6) Given two points p_1 and p_2 and two lines l_1 and l_2, we can make a fold that places p_1 onto line l_1 and places p_2 onto line l_2.



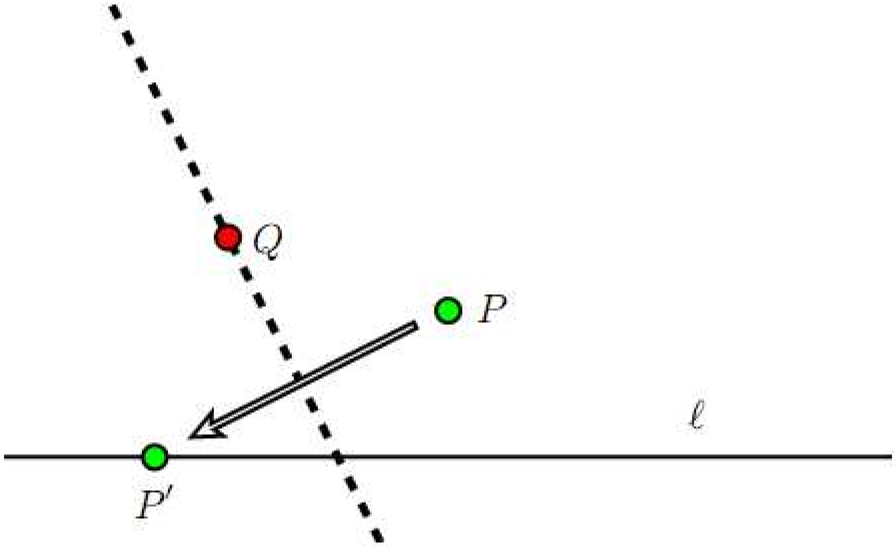
Axiomi origamija
(zadnji aksiom- našel Hatori)

(O7) Given a points p_1 and two lines l_1 and l_2, we can make a fold perpendicular to l_2 that places p_1 onto line l_1.



Še nekaj rezultatov

RISANJE PARABOLE Z ORIGAMIJEM



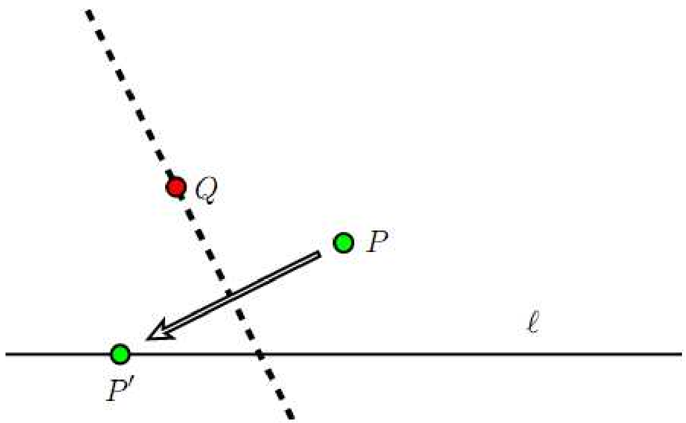
Aksiom 5: Dani sta premica ℓ in točki P ter Q. Tedaj lahko konstruiramo prepogib skozi Q, ki P preslika na premico

Ta konstrukcija ni vedno možna, če pa že je, ni enolična.

Zakaj?

Povzeto po Bill Casselman: If Euclid Had Been Japanese

RISANJE PARABOLE Z ORIGAMIJEM



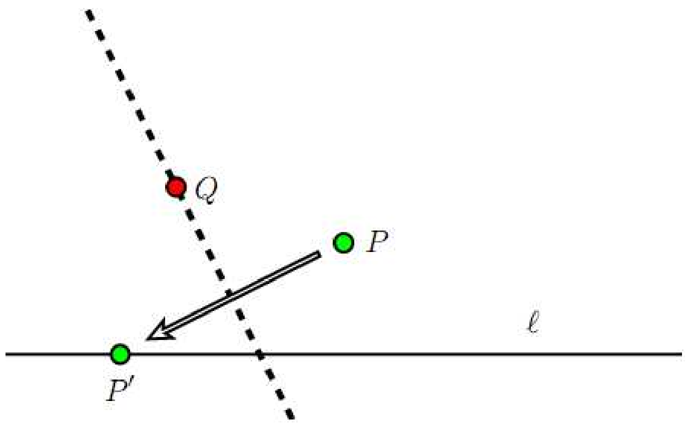
Izberimo koordinatni sistem, v katerem je ℓ abscisa, koordinate P pa so $P = (0, 1)$.

- Bodi $Q = (x_Q, y_Q)$.
- Prepogib je premica z enačbo $y = mx + b$, za katero

$$\begin{aligned} y_Q &= mx_Q + b. \\ (x_{P'}, 0) &= (x_P, y_P) - 2d(P, \ell) * \big(\text{pravokotni vektor na prepogib}\big) \\ &= (x_P, y_P) - 2\frac{y_Q - mx_Q - b}{\sqrt{m^2+1}} \cdot \frac{(-m, 1)}{\sqrt{m^2+1}} \\ &= (0, 1) - 2\frac{1 - b}{\sqrt{m^2+1}} \cdot \frac{(-m, 1)}{\sqrt{m^2+1}} \end{aligned}$$

Povzeto po Bill Casselman: If Euclid Had Been Japanese

RISANJE PARABOLE Z ORIGAMIJEM



$$y_Q = mx_Q + b.$$

$$(x_{P'}, 0) = (0,1) - 2\frac{1-b}{\sqrt{m^2+1}} \cdot \frac{(-m,1)}{\sqrt{m^2+1}}$$

S primerjavo ordinat: $0 = 1 - 2\frac{1-y_Q+mx_Q}{m^2+1} \cdot 1$, oziroma:

$$m^2 + 2mx_Q + 2y_Q - 1 = 0 \qquad b = y_Q - mx_Q$$

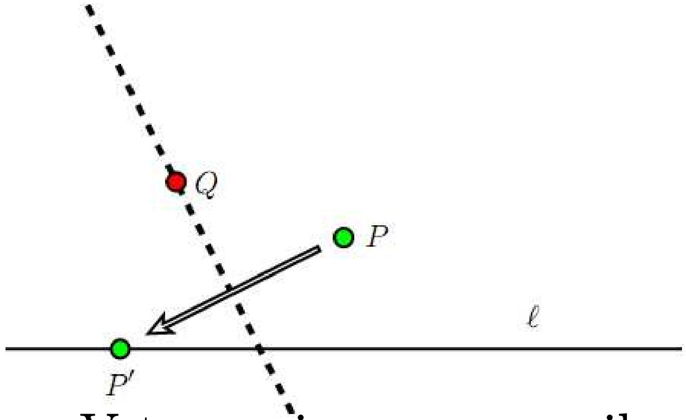
Kar je kvadratna enačba v m z rešitvijo

$$m = -x_Q \pm \sqrt{x_Q^2 + 1 - 2y_Q}.$$

Prepogib torej obstaja natanko tedaj, ko $x_Q^2 + 1 - 2y_Q \geq 0$, oz. ko Q leži zunaj parabole $\boldsymbol{y = \frac{x^2+1}{2}}$.

Povzeto po Bill Casselman: If Euclid Had Been Japanese

RISANJE PARABOLE Z ORIGAMIJEM

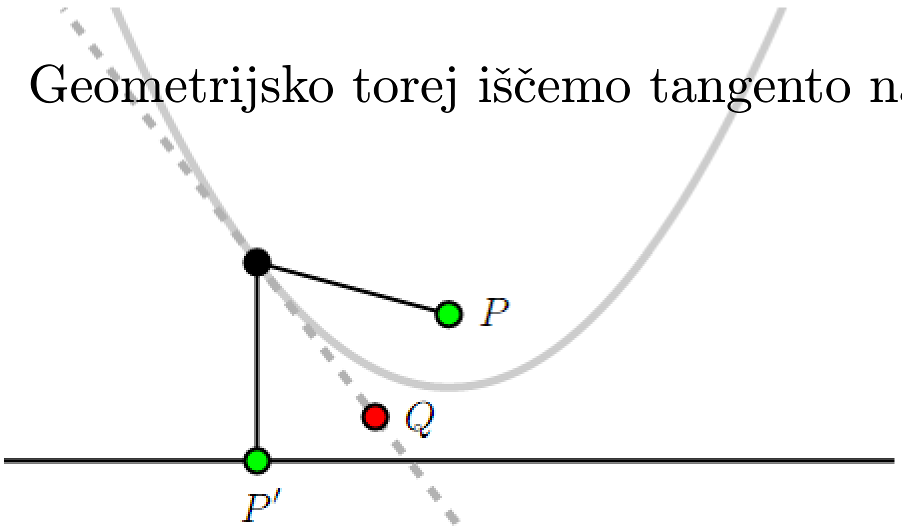


Prepogib obstaja čee
Q leži zunaj parabole
$$y = \frac{x^2+1}{2}$$

V tem primeru prepogib naredimo vzdolž
ene od premic (ki sekata parabolo $y = \frac{x^2+1}{2}$ le v eni točki.)

$$y = y_Q - (x_Q - x)\left(x_Q \pm \sqrt{x_Q^2 - 2y_Q + 1}\right)$$

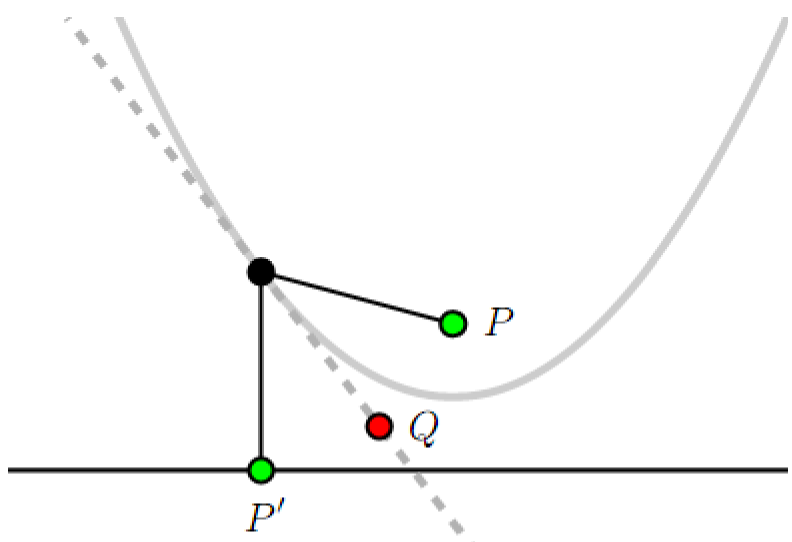
Geometrijsko torej iščemo tangento na parabolo, ki poteka skozi Q.

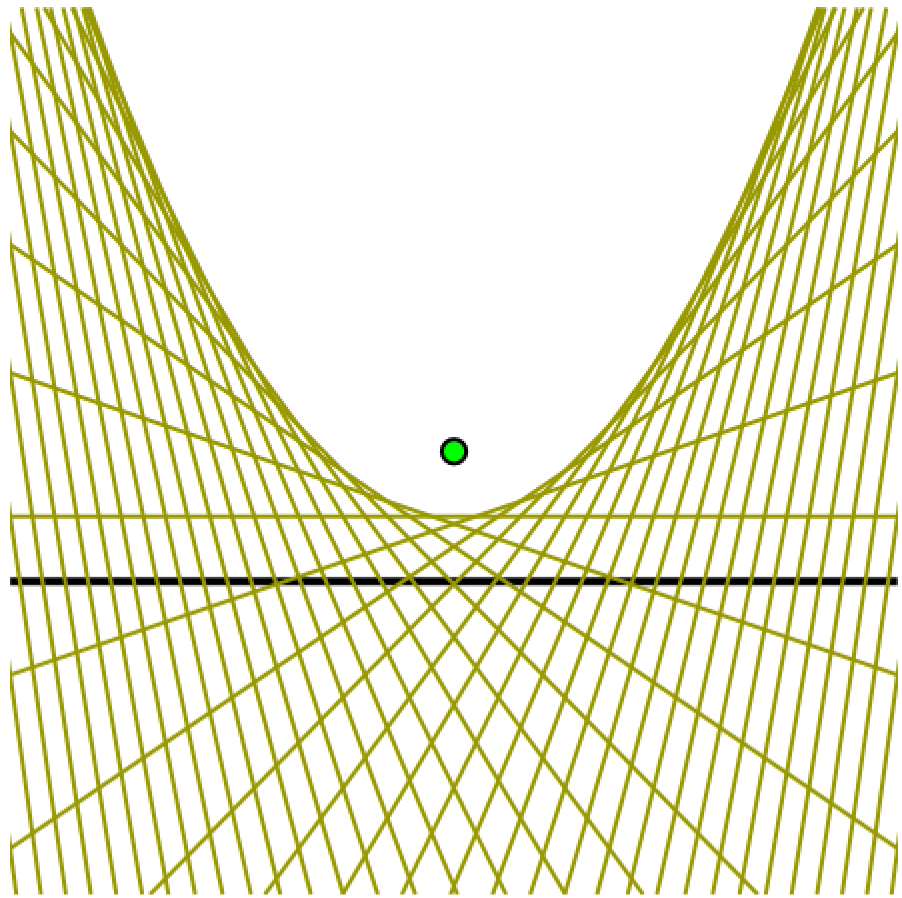


Povzeto po Bill Casselman: If Euclid Had Been Japanese

RISANJE PARABOLE Z ORIGAMIJEM

Ako fiksiramo P in spreminjamo Q dobimo družino premic, ki imajo $y = \frac{x^2+1}{2}$ za svojo ogrinjačo. Še več, P je gorišče te parabole, ℓ pa njena direktrisa.

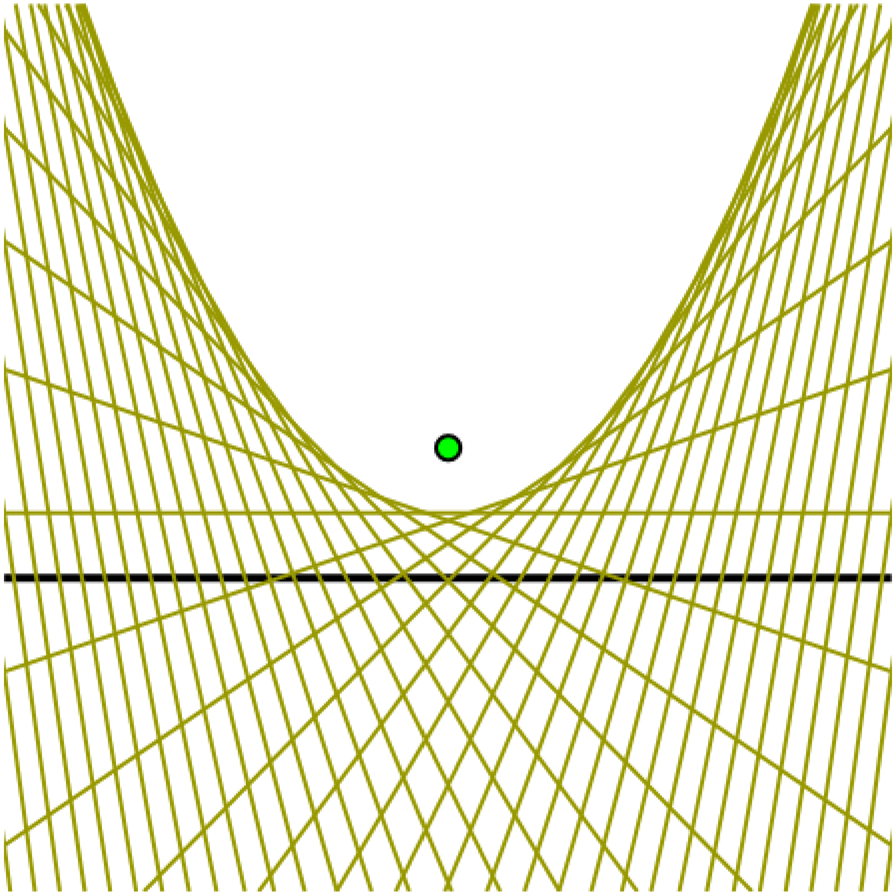




Povzeto po Bill Casselman: If Euclid Had Been Japanese

RISANJE PARABOLE Z ORIGAMIJEM

Mimogrede: Presek dveh krogov je kvadratna enačba.
Z origamijem pa tudi lahko rešujemo kvadratne enačbe.
Torej vse kar lahko konstruiramo z ravnilom in šestilom, lahko tudi z origamijem.



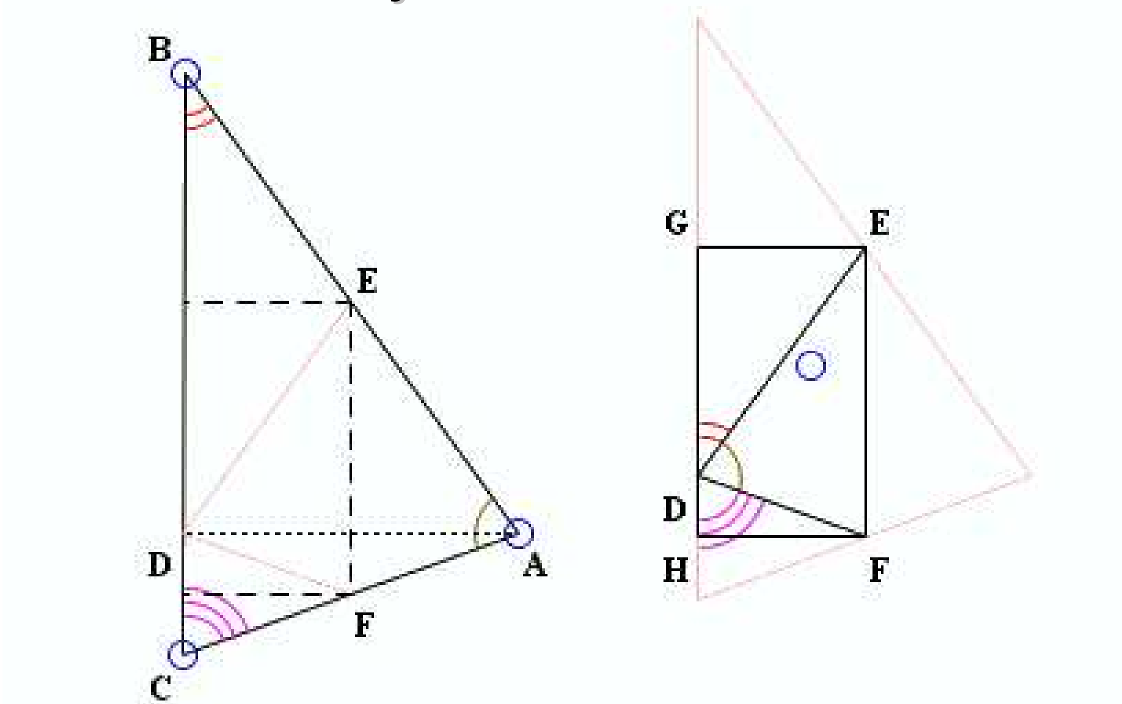
Povzeto po Bill Casselman: If Euclid Had Been Japanese

DOKAZOVANJE Z ORIGAMIJEM

IZREK : *Vsota kotov v trikotniku je 180^o*

DOKAZOVANJE Z ORIGAMIJEM

IZREK : *Vsota kotov v trikotniku je 180º*



DOKAZ

❖Bodi A oglišče ki ustreza največjemu kotu v trikotniku.

❖Prepognemo skozi A, da C leži na daljico BC (axiom 05) –dobimo D… višino na A.

❖Prepognemo – vzdolž daljice EF -- da točka A pride na točko D.

❖Po konstrukciji EF razpolavlja višino AD. Poleg tega je AD $\perp$ BC in EF$\perp$ AD, torej EF vzporednica BC.

❖ EF je torej razpolovišče trikotnika ABC, zato E razpolavlja daljico BA, F razpolavlja CA.

❖Torej |ED| = |EA| = |EB|, zato: Če prepognemo skozi E, pride B v D. Podobno za F.

DOKAZOVANJE Z ORIGAMIJEM

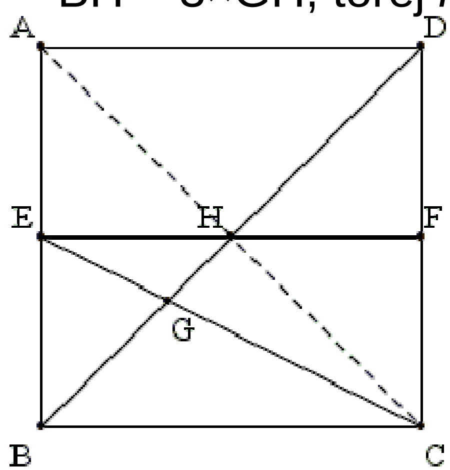
IZREK $\arctan(1) + \arctan(2) + \arctan(3) = \pi$.

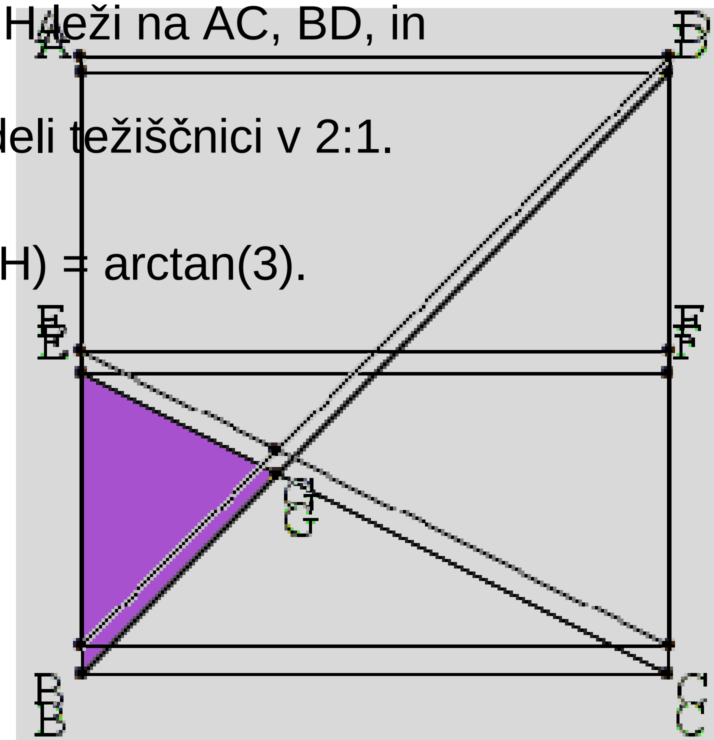
Povzeto po http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/PaperFolding/arctan123.shtml#demonstration

DOKAZOVANJE Z ORIGAMIJEM

IZREK *arctan(1) + arctan(2) + arctan(3) = π.*

- Vzemimo kvadrat ABCD. Naredimo tri prepogibe: BD, EC, in EF (E in F sta sredini AB oz CD).
- Iz ΔBCE dobimo *kot(*BEG) = *kot(* ECF) = arctan(2).
- Iz ΔABD, dobimo *kot(* EBG) = *kot(* ABD) = arctan(1).
- Preostane dokazati *kot*(BGE)= arctan(3), kajti tedaj so v ΔBEG koti natanko arctan(1), arctan(2) arctan(3).
- Dodajmo diagonalo AC in bodi H središče kvadrata. H leži na AC, BD, in EF.
- V ΔABC, BH in CE sta težiščnici in G je težišče. G deli težiščnici v 2:1. Sledi GH = BH/3.
- V ΔCGH, CH = BH = 3×GH, torej *kot*(BGE)= *kot*(CGH) = arctan(3).



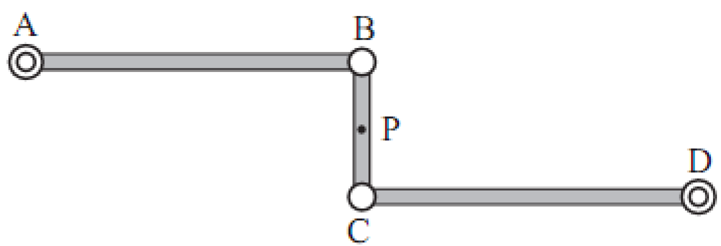


Povzeto po http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/PaperFolding/arctan123.shtml#demonstration

ORIGAMI S SKLOPI (linkages)

Osnovni problem industrijske revolucije:

Naredi napravo, ki bo paralelno gibanje (gibanja bata)
spremenila v krožno gibanje (gibanje koles)



James Watt 1784 (približno paralelno)

- James Watt (pismo Matthew Boultonu)

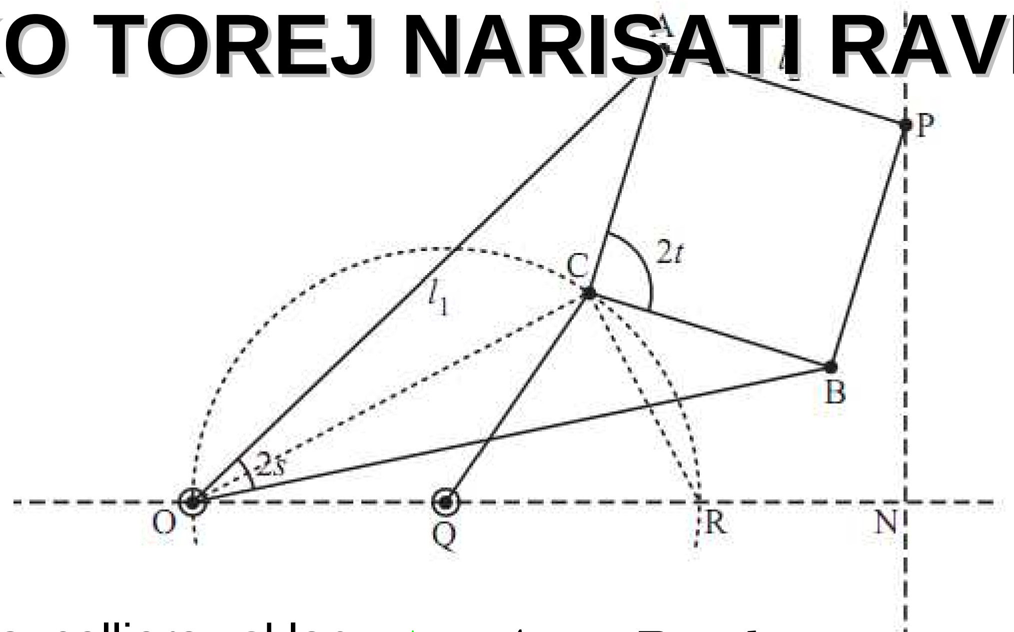
[*a]lthough I am not over anxious after fame, yet I am more proud of the parallel motion than of any other invention I have ever made.*

B1

ORIGAMI S SKLOPI (linkages)

Prvi ki reši problem (v ravnini) je Peaucellier 1864

KAKO TOREJ NARISATI RAVNO ČRTO??

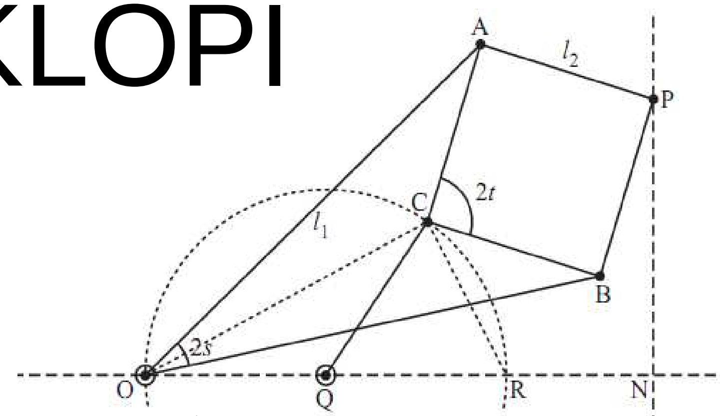


Peaucellierov sklop.

- ★ $0A = 0B = l_1$
- ★ $AP = BP = AC = BC = l_2$
- ★ $OQ = QC$

B2

ORIGAMI S SKLOPI

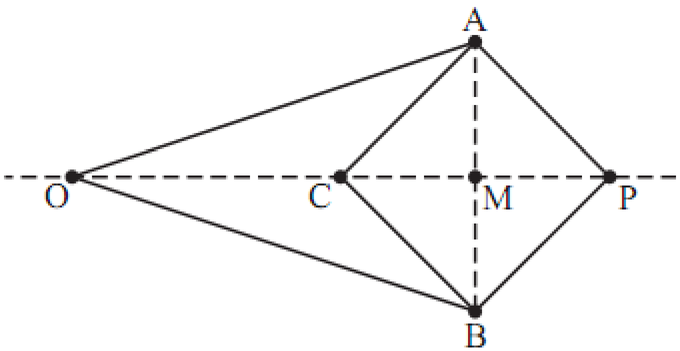


★ $0A = 0B = l_1$

★ $AP = BP = AC = BC = l_2$

★ $OQ = QC$

DOKAZ, da P potuje po ravni črti



Osnovna celica Peaucellierevega sklopa
(odstranimo povezavo CQ)

Pitagora:

★ $(OM)^2 + (AM)^2 = l_1^2$

★ $(PM)^2 + (AM)^2 = l_2^2.$

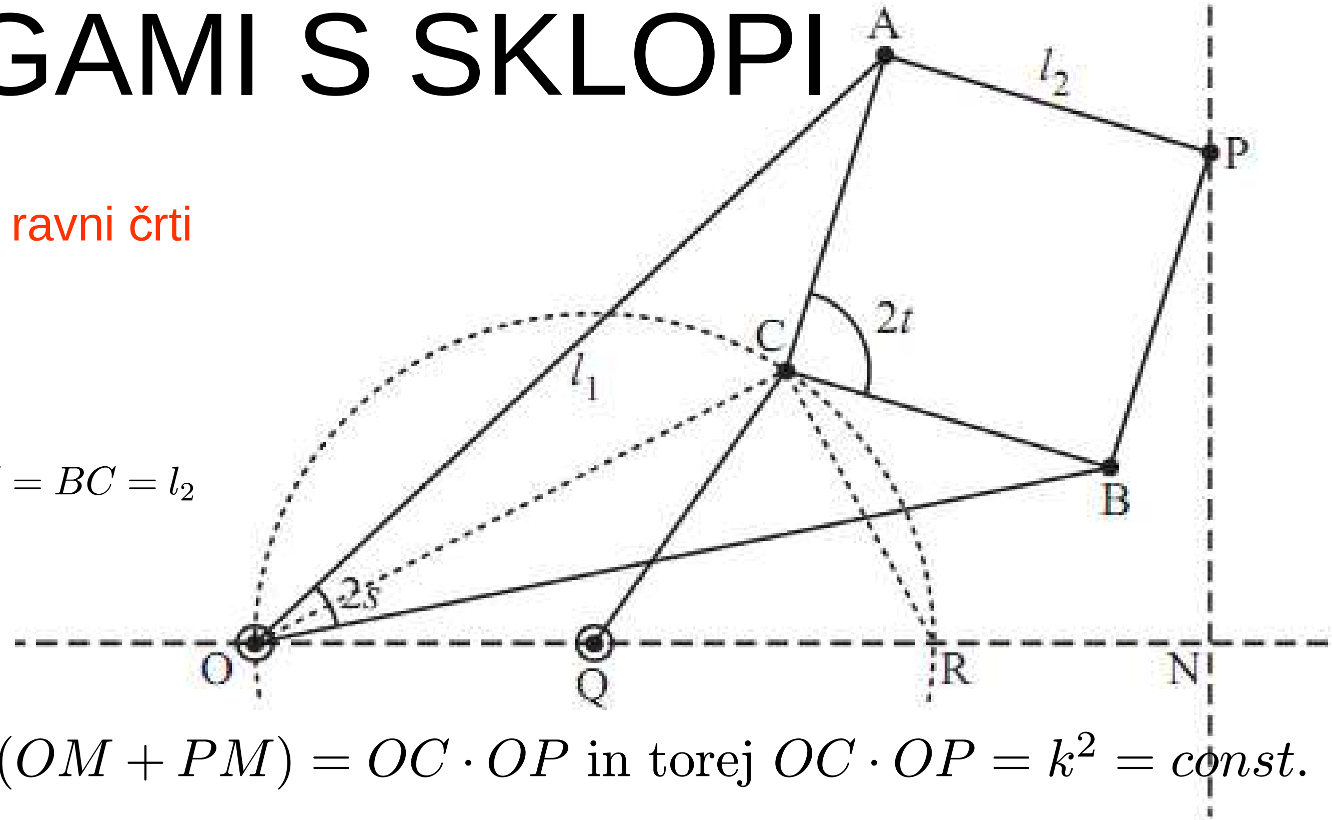
Odštejmo, in dobimo $(OM)^2 - (PM)^2 = l_1^2 - l_2^2$, oziroma:
$(OM - PM)(OM + PM) = k^2 := l_1^2 - l_2^2.$

Toda $(OM - PM)(OM + PM) = OC \cdot OP$ in torej $OC \cdot OP = k^2 = const.$

B3

ORIGAMI S SKLOPI

DOKAZ, da P potuje po ravni črti



- ★ $0A = 0B = l_1$
- ★ $AP = BP = AC = BC = l_2$
- ★ $OQ = QC$

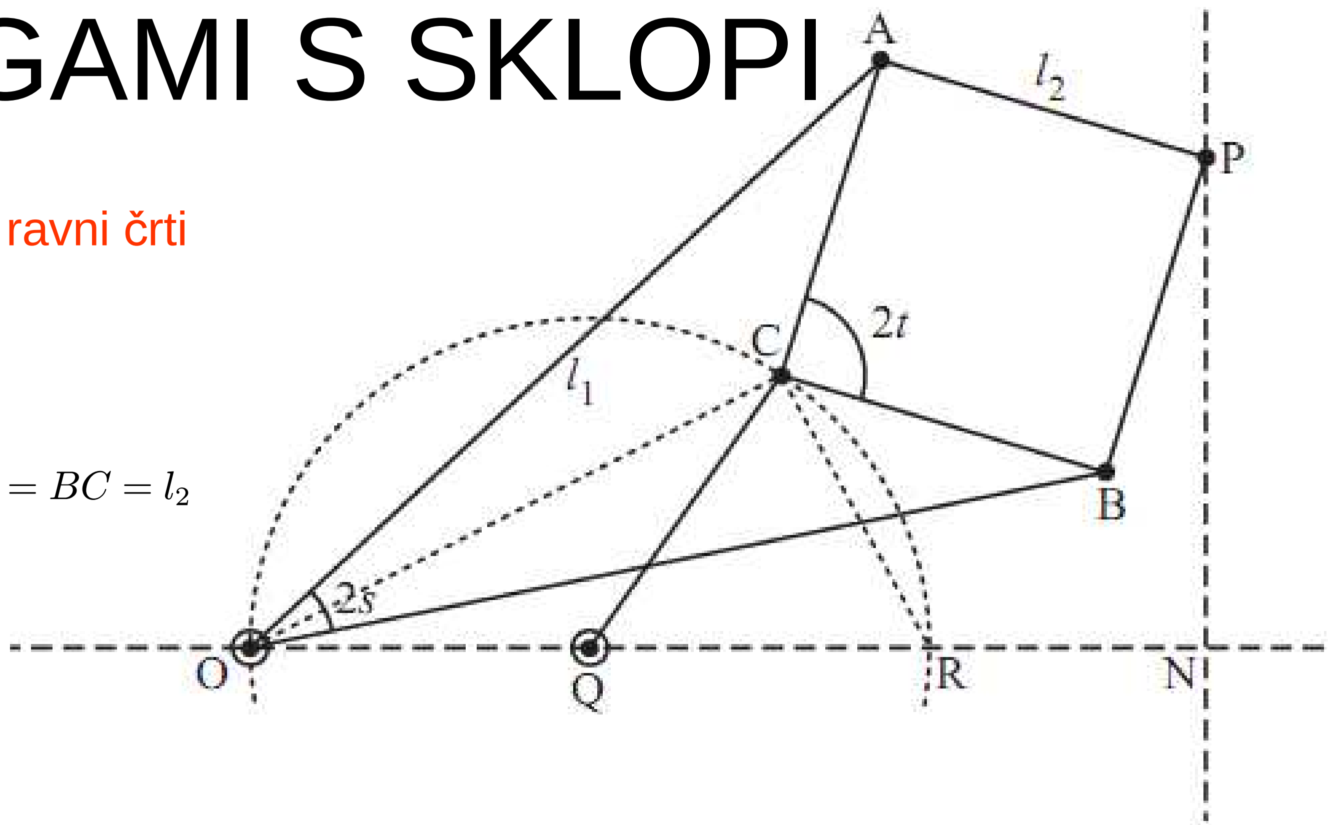
Toda $(OM - PM)(OM + PM) = OC \cdot OP$ in torej $OC \cdot OP = k^2 = const.$

Dodajmo povezavo QC. Fiksirajmo Q in 0,
točka C se giblje po krožnici okoli Q polmera $QC = QO$.

- ★ Trikotnik OCR je pravokotni (Talesov izrek o obodnem kotu).
- ★ Bodi N pravokotna projekcija na premico OQ iz točke P.
- ★ OCP ležijo na isti premici (OP je diagonala v rombu, OC pa je enako oddaljena od krajišč romba.
- ★ Torej je $\triangle OCR$ podoben $\triangle ONP$.
- ★ Zato $\frac{ON}{OP} = \frac{OC}{OR}$

B4

ORIGAMI S SKLOPI



DOKAZ, da P potuje po ravni črti

- ★ $0A = 0B = l_1$
- ★ $AP = BP = AC = BC = l_2$
- ★ $OQ = QC$

Toda $(OM - PM)(OM + PM) = OC \cdot OP$ in torej $OC \cdot OP = k^2 = const.$

- ★ $\frac{ON}{OP} = \frac{OC}{OR}$.
- ★ Torej $ON = \frac{OC \cdot OP}{OR} = \frac{k^2}{2OQ} = const.$
- ★ Torej je Pravokotna projekcija iz P na OQ konstantna, zato se P giblje po premici. $\square$

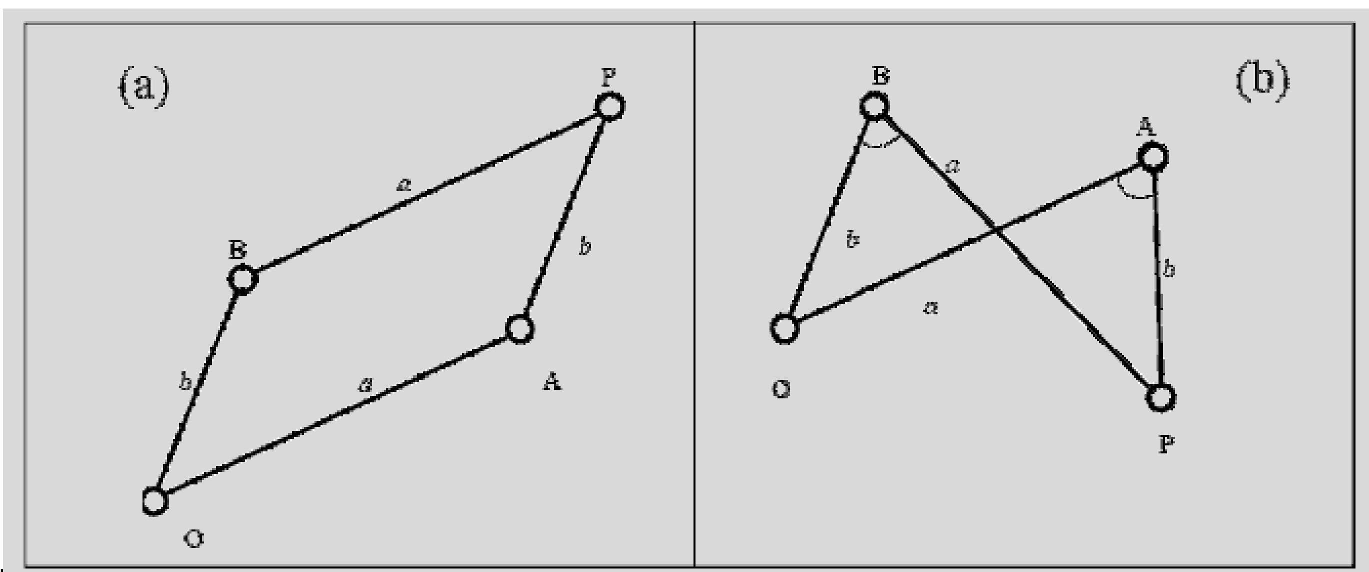
B5

ORIGAMI S SKLOPI

Univerzalnostni rezultat: Obstaja ravninski sklop, ki iziše naše ime. Npr:

Natančneje

Izrek (Kempe). Bodi f(x,y) polinom. Tedaj obstaja ravninski sklop, ki ga sestavljajo zgolj paralelogrami in antiparalelogrami, ki sledi krivuljo f(x,y)=0.

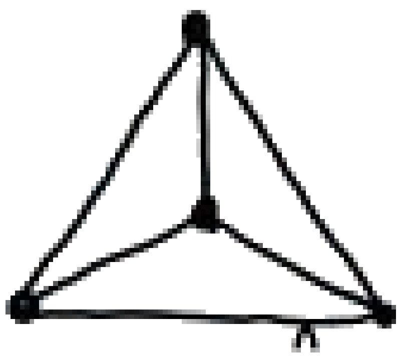


Glej Saxena Kempe's Linkages and the Universality Theorem http://www.ias.ac.in/resonance/March2011/p220-237.pdf

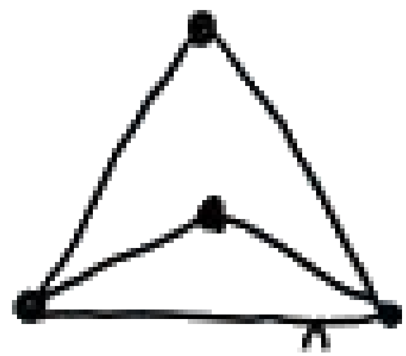
B6

ORIGAMI S SKLOPI

Vprašanje rigidnosti: Ali je dani spoj fiksen ali pa lahko spreminja obliko?



Fiksen v 2D
Fiksen v 3D



Fiksen v 2D
Gibljiv v 3D

Gibljiv v 2D
Gibljiv v 3D

Obstaja algoritem, ki v 2D pove ali je spoj gibljiv ali ne.
ODPRTO VPRAŠANJE: Konstruiraj algoritem, ki v 3D pove, ali je spoj gibljiv ali ne.

Glej Saxena **Kempe's Linkages and the Universality Theorem** http://www.ias.ac.in/resonance/March2011/p220-237.pdf

B7

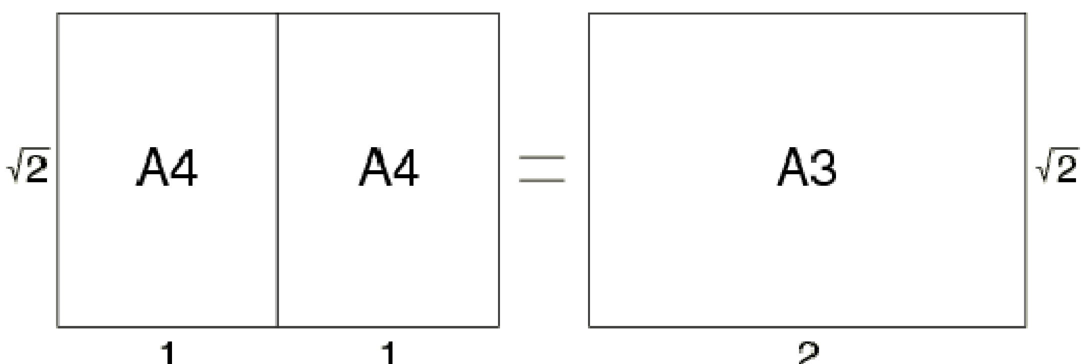
ORIGAMI

Kolikokrat lahko papir debeline t prepognemo?

❖Vsakič se debelina papirja podvoji. Po N prepogibih dobimo debelino 2^N t.

❖Za standardni A4 papir dimenzij (v mm) 210 × 297 x 0.05:

- ✓Prvi prepogib ga stanjša na cca 150 mm in zdebeli na 0.1 mm
- ✓Drugi prepogib: 75 mm širine in 0.2mm debeline
- ✓…. V 7 prepogibu bi bil cca 300/ 2^7 = 2.34 mm širok toda 0.05 * 2^7 =**6.4 mm debel**



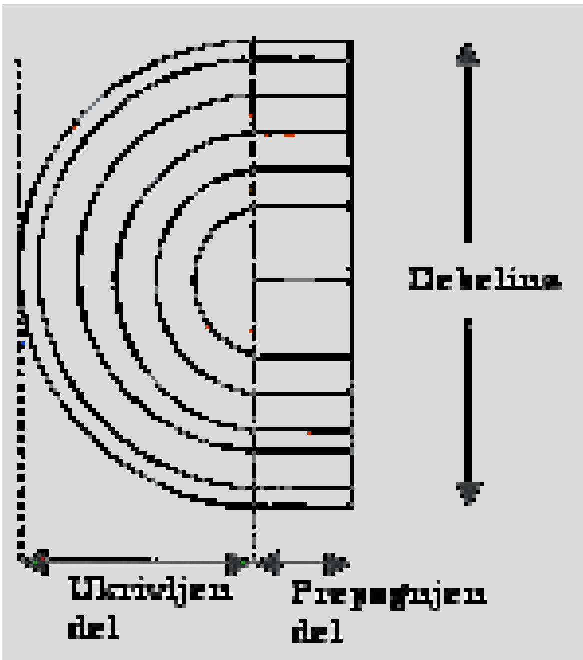
$1 : \sqrt{2} = \sqrt{2} : 2$

Glej http://www.abc.net.au/science/articles/2005/12/21/1523497.htm

B8

ORIGAMI

Kolikokrat lahko papir debeline t prepognemo?



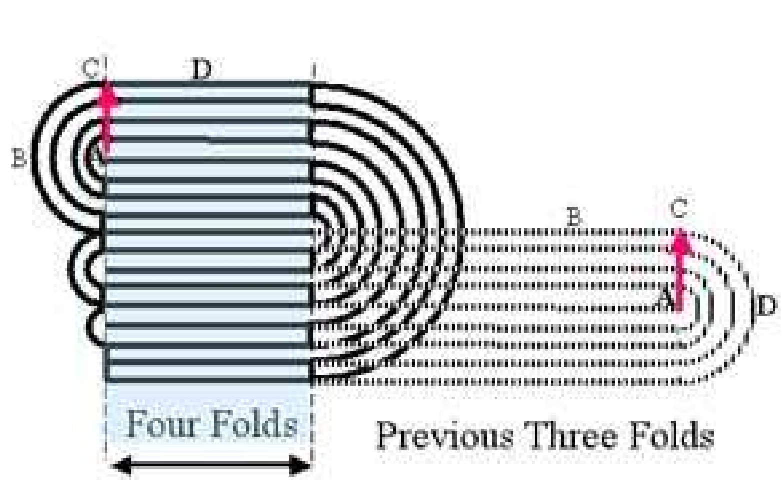
Kopirano iz http://mathforum.org/mathimages/index.php/Bedsheet_Problem#equation_Eq._1

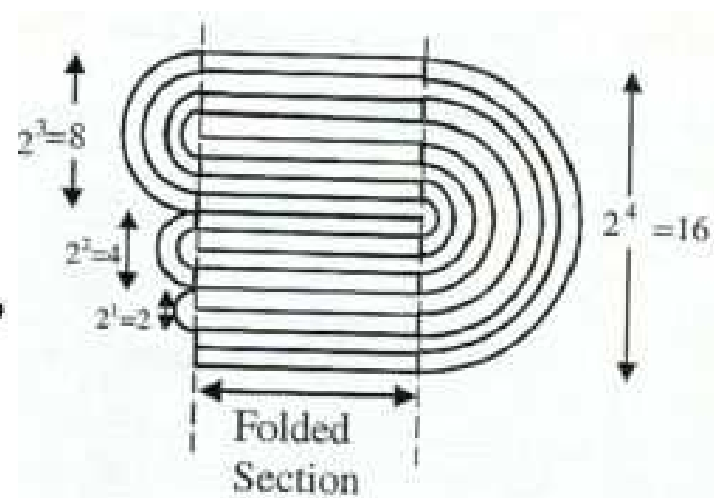
ORIGAMI

Kolikokrat lahko papir debeline t prepognemo?

Izrek (Britney Gallivan 2001). Za N prepogibov (v isti smeri) papirja debeline t rabimo dolžino vsaj L= $\frac{\pi t * (2^n + 4)(2^n - 1)}{6}$

DOKAZ:





L= $\pi t * \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{2^{i-1}} [2^{i-1} - (k-1)]$

V notranji vsoti je radij od zunanjega prepogn. dela

Kopirano iz http://mathforum.org/mathimages/index.php/Bedsheet_Problem#equation_Eq._1

B10

ORIGAMI

Britney Gallivan

Kopirano iz http://mathforum.org/mathimages/index.php/Bedsheet_Problem#equation_Eq._1

ORIGAMI

Nadaljevanje sledi……….