Sprehod skozi zgodovino teorije grafov

Aleksander Malnič

Pedagoška fakulteta Univerza v Ljubljani
Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko, Ljubljana
Inštitut Andrej Marušič, Univerza na Primorskem

Matematika je kul

FAMNIT, Koper
27. avgust 2012

Deset velikih problemov

Deset velikih problemov

1. Problem königsberških mostov

Deset velikih problemov

1. Problem königsberških mostov
2. Hamiltonov problem

Deset velikih problemov

1. Problem königsberških mostov
2. Hamiltonov problem
3. Planarnost

Deset velikih problemov

1. Problem königsberških mostov
2. Hamiltonov problem
3. Planarnost
4. Problem 4 barv

Deset velikih problemov

1. Problem königsberških mostov
2. Hamiltonov problem
3. Planarnost
4. Problem 4 barv
5. Analiza omrežij in pretokov

Deset velikih problemov

1. Problem königsberških mostov
2. Hamiltonov problem
3. Planarnost
4. Problem 4 barv
5. Analiza omrežij in pretokov
6. Problem 8 dam

Deset velikih problemov

1. Problem königsberških mostov
2. Hamiltonov problem
3. Planarnost
4. Problem 4 barv
5. Analiza omrežij in pretokov
6. Problem 8 dam
7. Preštevanje

Deset velikih problemov

1. Problem königsberških mostov
2. Hamiltonov problem
3. Planarnost
4. Problem 4 barv
5. Analiza omrežij in pretokov
6. Problem 8 dam
7. Preštevanje
8. Algoritmični problemi na grafih

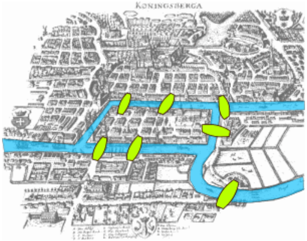
Deset velikih problemov

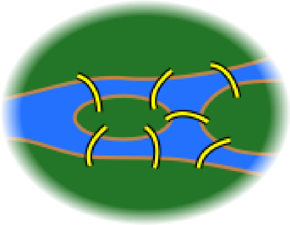
1. Problem königsberških mostov
2. Hamiltonov problem
3. Planarnost
4. Problem 4 barv
5. Analiza omrežij in pretokov
6. Problem 8 dam
7. Preštevanje
8. Algoritmični problemi na grafih
9. Teorija avtomatov

Deset velikih problemov

1. Problem königsberških mostov
2. Hamiltonov problem
3. Planarnost
4. Problem 4 barv
5. Analiza omrežij in pretokov
6. Problem 8 dam
7. Preštevanje
8. Algoritmični problemi na grafih
9. Teorija avtomatov
10. Študij simetrije

I. Problem königsberških mostov





Königsberg sredi 18. stoletja (današnji Kaliningrad)

Matematiki

Matematiki

Christian Goldbach (1690-1764)

Vsako sodo naravno število > 2 je vsota dveh praštevil.

Matematiki

 Christian Goldbach (1690-1764)

Vsako sodo naravno število > 2 je vsota dveh praštevil.

 David Hilbert (1862-1943)

2. kongres matematikov v Parizu 1900: zastavil 23 problemov.

Matematiki

 Christian Goldbach (1690-1764)
Vsako sodo naravno število > 2 je vsota dveh praštevil.

 David Hilbert (1862-1943)
2. kongres matematikov v Parizu 1900: zastavil 23 problemov.

 Hermann Minkowski (1864-1909)
4-dimenzionalni svet Minkowskega:l Einsteinova teorija relativnosti

Znamenite osebnosti Königsberga

Fiziki

Fiziki

 Gustav Kirchhoff (1824-1887)

Analiza električnih omrežij: Kirchhoffovi zakoni

Fiziki

 Gustav Kirchhoff (1824-1887)
Analiza električnih omrežij: Kirchhoffovi zakoni

 Arnold Sommerfeld (1868-1951)
Eden tvorcev kvantne mehanike

Umetniki in humanisti

Umetniki in humanisti

 E. T. A. Hoffmann (1776-1822)
Hoffmannove pripovedke (J.Offenbach), Hrestač (P. I. Čajkovski)

Umetniki in humanisti

 E. T. A. Hoffmann (1776-1822)
Hoffmannove pripovedke (J.Offenbach), Hrestač (P. I. Čajkovski)

 Immanuel Kant (1724-1804)
Eden najvidnejših filozofov

Umetniki in humanisti

 E. T. A. Hoffmann (1776-1822)
Hoffmannove pripovedke (J.Offenbach), Hrestač (P. I. Čajkovski)

 Immanuel Kant (1724-1804)
Eden najvidnejših filozofov

 Hannah Arendt (1906-1975)
Politična teoretičarka. Prva ženska predavateljica na Princetonu

Leonhard Euler, 1707-1783

Leonhard Euler, 1707-1783

St.Peterburg (1727-1741), Berlin (1741-1766), St.Peterburg (1766-1783)

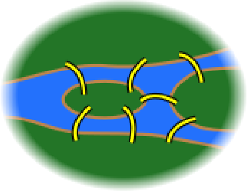
St.Peterburg (1727-1741), Berlin (1741-1766), St.Peterburg (1766-1783)

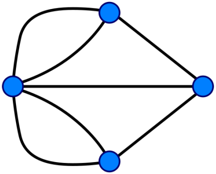
Peter Veliki(1672-1725)

Frederik Veliki (1712-86)

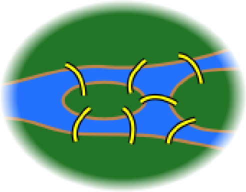
Katarina Velika(1729-96)

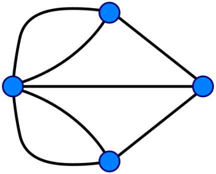
Leonhard Euler: problem königsberških mostov





Leonhard Euler: problem königsberških mostov



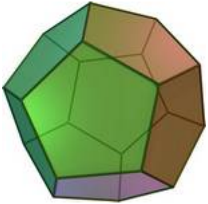


Izrek (Euler, 1736). Povezan graf je Eulerjev $\Leftrightarrow$ stopnje vseh točke sode.

II. Hamiltonov problem

II. Hamiltonov problem

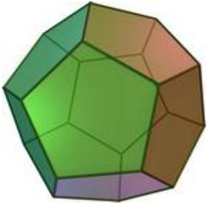
Sir William R. Hamilton, 1805-1865



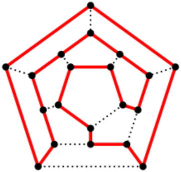
Razvedrilna igra, 1857

II. Hamiltonov problem

Sir William R. Hamilton, 1805-1865

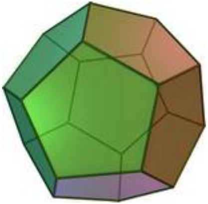


Razvedrilna igra, 1857

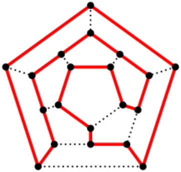


Hamiltonski cikel v grafu dodekaedra

Sir William R. Hamilton, 1805-1865



Razvedrilna igra, 1857

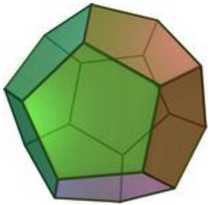


Hamiltonski cikel v grafu dodekaedra

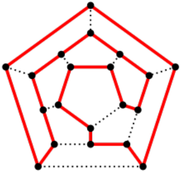
Ali je dani graf hamiltonski?

II. Hamiltonov problem

Sir William R. Hamilton, 1805-1865



Razvedrilna igra, 1857



Hamiltonski cikel v grafu dodekaedra

Ali je dani graf hamiltonski?
Algoritmično težak problem (Richard M. Karp, 1972)

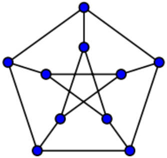
Hamiltonov problem

Hamiltonov problem

Za vrsto grafov s posebnimi lastnostmi (recimo z visoko simetrijo) se da dokazati, da so hamiltonski.

Za vrsto grafov s posebnimi lastnostmi (recimo z visoko simetrijo) se da dokazati, da so hamiltonski.

Julius Petersen, 1839-1910

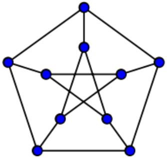


Obstaja le hamiltonska pot

Hamiltonov problem

Za vrsto grafov s posebnimi lastnostmi (recimo z visoko simetrijo) se da dokazati, da so hamiltonski.

Julius Petersen, 1839-1910



Obstaja le hamiltonska pot

Laszlo Lovasz, 1948-

Ali ima vsak povezan tranzitiven graf hamiltonsko pot?, 1968

Hamiltonov problem

Hamiltonov problem

Vrsta optimizacijskih problemov
(v matematiki, fiziki, kemiji, biologiji, računalništvu, logistiki)
$\rightarrow$ Hamiltonov problem (morda z dodatnimi omejitvami)

Hamiltonov problem

Vrsta optimizacijskih problemov
(v matematiki, fiziki, kemiji, biologiji, računalništvu, logistiki)
$\rightarrow$ Hamiltonov problem (morda z dodatnimi omejitvami)

Problem trgovskega potnika

Dan (polni) graf z vrednostmi ("cenami") na povezavah.
Konstruiraj "najcenejši" hamiltonski cikel! (1930)

Vrsta optimizacijskih problemov
(v matematiki, fiziki, kemiji, biologiji, računalništvu, logistiki)
$\rightarrow$ Hamiltonov problem (morda z dodatnimi omejitvami)

Problem trgovskega potnika

Dan (polni) graf z vrednostmi ("cenami") na povezavah.
Konstruiraj "najcenejši" hamiltonski cikel! (1930)

Karl Menger, 1902-1985

Vrsta optimizacijskih problemov
(v matematiki, fiziki, kemiji, biologiji, računalništvu, logistiki)
→ Hamiltonov problem (morda z dodatnimi omejitvami)

Problem trgovskega potnika

Dan (polni) graf z vrednostmi ("cenami") na povezavah.
Konstruiraj "najcenejši" hamiltonski cikel! (1930)

Karl Menger, 1902-1985

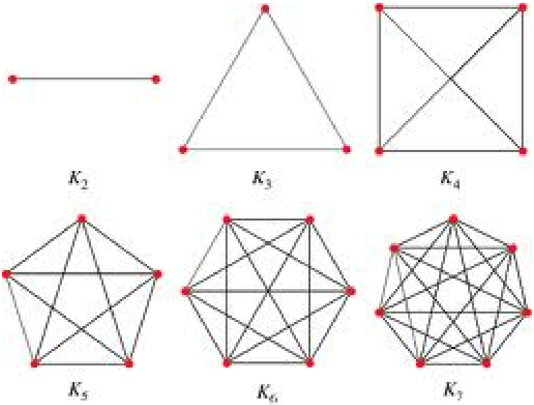
Izjemen napredek 50' in 60' letih. Problem aktualen še danes.

III. Planarnost

III. Planarnost

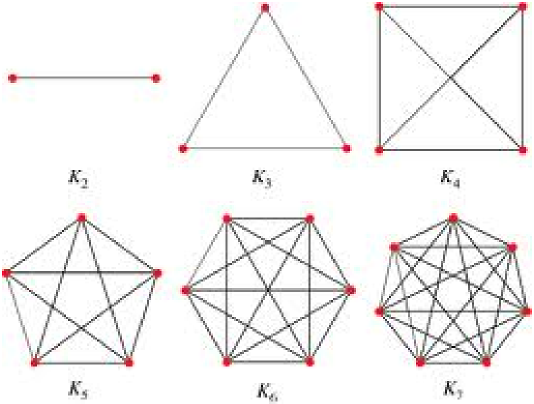
Graf je planaren = $\exists$ realizacija v ravnini brez "napačnih" presečišč.

Graf je planaren = $\exists$ realizacija v ravnini brez "napačnih" presečišč.



III. Planarnost

Graf je planaren = $\exists$ realizacija v ravnini brez "napačnih" presečišč.



Vrsta optimizacijskih problemov $\rightarrow$ problem planarnosti

Planarnost

Planarnost

Izrek (Euler, 1752) Za povezan planaren graf velja $|V| - |E| + |F| = 2$.

Planarnost

Izrek (Euler, 1752) Za povezan planaren graf velja $|V| - |E| + |F| = 2$.

Prvi popoln dokaz sta podala Legandre (1794) in Cauchy (1811)

Adrien-Marie Legendre, 1752-1833

Augustin-Marie Cauchy, 1789-1857

Planarnost: uporaba Eulerjeve formule

Planarnost: uporaba Eulerjeve formule

Z uporabo Eulerjeve formule in naslednjih enakosti

$$|F_1| + |F_2| + |F_3| + \ldots + |F_r| = |F|$$
$$|F_1| + 2\,|F_2| + 3\,|F_3| + \ldots + r\,|F_r| = 2\,|E|$$

se v precej primerih da enostavno dokazati, da dani graf ni planaren. Na primer, K_5 in $K_{3,3}$

Planarnost: uporaba Eulerjeve formule

Z uporabo Eulerjeve formule in naslednjih enakosti

$$|F_1| + |F_2| + |F_3| + \ldots + |F_r| = |F|$$
$$|F_1| + 2\,|F_2| + 3\,|F_3| + \ldots + r\,|F_r| = 2\,|E|$$

se v precej primerih da enostavno dokazati, da dani graf ni planaren.
Na primer, K_5 in $K_{3,3}$

Robert E. Tarjan, 1948-
Razvil učinkovit (linearen) algoritem za testiranje planarnosti, 1973.

Kazimierz Kuratowski, 1896-1980

Kazimierz Kuratowski, 1896-1980

Izrek (1930) Povezan graf je planaren $\Leftrightarrow$ ne "vsebuje" $K_{3,3}$ ali K_5.

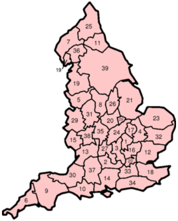
Kazimierz Kuratowski, 1896-1980

Izrek (1930) Povezan graf je planaren $\Leftrightarrow$ ne "vsebuje" $K_{3,3}$ ali K_5.

Neil Roberston (1938-) in Paul Seymour (1950-)
Posplošila izrek Kuratowskega na poljubne ploskve, 1990.

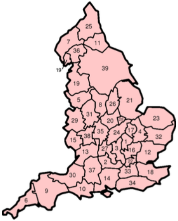
IV. Problem štirih barv

Francis Guthrie, 1831-1899



Zemljevid angleških grofij, 1852

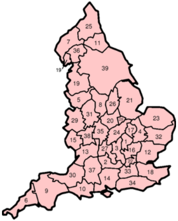
Francis Guthrie, 1831-1899



Zemljevid angleških grofij, 1852

Ali je vsak zemljevid mogoče pravilno pobarvati s 4 barvami?

Francis Guthrie, 1831-1899

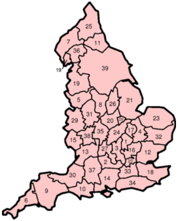


Zemljevid angleških grofij, 1852

Ali je vsak zemljevid mogoče pravilno pobarvati s 4 barvami?
Ali je vsak ravninski graf mogoče pravilno obarvati s 4 barvami?

IV. Problem štirih barv

Francis Guthrie, 1831-1899

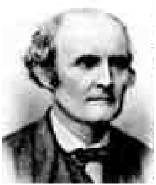


Zemljevid angleških grofij, 1852

Ali je vsak zemljevid mogoče pravilno pobarvati s 4 barvami?
Ali je vsak ravninski graf mogoče pravilno obarvati s 4 barvami?

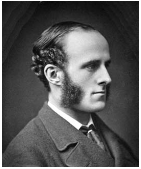
Augustus De Morgan, 1806-1871

1879 $\rightarrow$

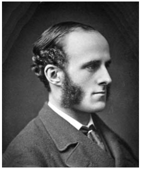


Arthur Cayley, 1821-1895

Problem štirih barv



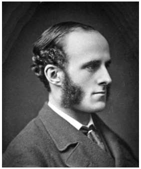
Alfred Kempe, 1849-1922, Objavil "rešitev" (1879)



Alfred Kempe, 1849-1922, Objavil "rešitev" (1879)

Percy J. Heawood, 1861-1955

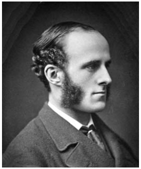
Našel napako v Kempejevem dokazu (1890).



Alfred Kempe, 1849-1922, Objavil "rešitev" (1879)

Percy J. Heawood, 1861-1955

Našel napako v Kempejevem dokazu (1890).
Dokazal **Izrek 5 barv**.



Alfred Kempe, 1849-1922, Objavil "rešitev" (1879)

Percy J. Heawood, 1861-1955

Našel napako v Kempejevem dokazu (1890).
Dokazal **Izrek 5 barv**.
Domnevo posplošil na zemljevide, ki niso ravninski

20. stoletje:

Vrsta problemov iz kombinatorične optimizacije $\rightarrow$ bravanje grafov

20. stoletje:

Vrsta problemov iz kombinatorične optimizacije → bravanje grafov

Problem 4 barv postane splošno poznan

20. stoletje:

Vrsta problemov iz kombinatorične optimizacije $\rightarrow$ bravanje grafov

Problem 4 barv postane splošno poznan

1976: Kenneth Appel (1932-), Wolfgang Haken (1928-)

Izrek 4 barv Vsak planaren graf se da pravilno obarvati s 4-barvami.

20. stoletje:
Vrsta problemov iz kombinatorične optimizacije $\rightarrow$ bravanje grafov
Problem 4 barv postane splošno poznan

1976: Kenneth Appel (1932-), Wolfgang Haken (1928-)
Izrek 4 barv Vsak planaren graf se da pravilno obarvati s 4-barvami.

Metoda
Sofisticiran sistem redukcij na manjše grafe (nekaj sto strani)
1,936 osnovnih konfiguracij preverila z računalnikom (nekaj tisoč ur)

20. stoletje:

Vrsta problemov iz kombinatorične optimizacije $\rightarrow$ bravanje grafov

Problem 4 barv postane splošno poznan

1976: Kenneth Appel (1932-), Wolfgang Haken (1928-)

Izrek 4 barv Vsak planaren graf se da pravilno obarvati s 4-barvami.

Metoda

Sofisticiran sistem redukcij na manjše grafe (nekaj sto strani)

1,936 osnovnih konfiguracij preverila z računalnikom (nekaj tisoč ur)

Kontroverzna rešitev

Prvi matematični dokaz z ekstenzivno uporabo računalnika

20. stoletje:

Vrsta problemov iz kombinatorične optimizacije → bravanje grafov

Problem 4 barv postane splošno poznan

1976: Kenneth Appel (1932-), Wolfgang Haken (1928-)

Izrek 4 barv Vsak planaren graf se da pravilno obarvati s 4-barvami.

Metoda

Sofisticiran sistem redukcij na manjše grafe (nekaj sto strani)

1,936 osnovnih konfiguracij preverila z računalnikom (nekaj tisoč ur)

Kontroverzna rešitev

Prvi matematični dokaz z ekstenzivno uporabo računalnika

Kaj je matematični dokaz?

20. stoletje:
Vrsta problemov iz kombinatorične optimizacije $\rightarrow$ bravanje grafov
Problem 4 barv postane splošno poznan

1976: Kenneth Appel (1932-), Wolfgang Haken (1928-)
Izrek 4 barv Vsak planaren graf se da pravilno obarvati s 4-barvami.

Metoda
Sofisticiran sistem redukcij na manjše grafe (nekaj sto strani)
1,936 osnovnih konfiguracij preverila z računalnikom (nekaj tisoč ur)

Kontroverzna rešitev
Prvi matematični dokaz z ekstenzivno uporabo računalnika
Kaj je matematični dokaz?

Gerhard Ringel (1920-2008), J. W. T. Youngs (1910-1970)
Dokazala Heawoodovo domnevo
o barvanju zamljevidov na poljubnih ploskvah (1968).

20. stoletje:
Vrsta problemov iz kombinatorične optimizacije → bravanje grafov
Problem 4 barv postane splošno poznan

1976: Kenneth Appel (1932-), Wolfgang Haken (1928-)
Izrek 4 barv Vsak planaren graf se da pravilno obarvati s 4-barvami.

Metoda
Sofisticiran sistem redukcij na manjše grafe (nekaj sto strani)
1,936 osnovnih konfiguracij preverila z računalnikom (nekaj tisoč ur)

Kontroverzna rešitev
Prvi matematični dokaz z ekstenzivno uporabo računalnika
Kaj je matematični dokaz?

Gerhard Ringel (1920-2008), J. W. T. Youngs (1910-1970)
Dokazala Heawoodovo domnevo
o barvanju zamljevidov na poljubnih ploskvah (1968).

Izrek 4 barv je zgolj poseben primer tega splošnega izreka.
Radikalno drugačne tehnike dokazovanja.

V. Analiza omrežij in študij pretokov

Gustav Kirchhoff, 1824-1887

Analiza tokov v električnih omrežjih, 1847

Gustav Kirchhoff, 1824-1887

Analiza tokov v električnih omrežjih, 1847

$\rightarrow$ **zametek teorije homolgije**

ki jo je konec 19. stol. utemeljil Henri Poincaré (1845-1912)

V. Analiza omrežij in študij pretokov

Gustav Kirchhoff, 1824-1887

Analiza tokov v električnih omrežjih, 1847

$\rightarrow$ **zametek teorije homolgije**

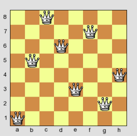
ki jo je konec 19. stol. utemeljil Henri Poincaré (1845-1912)

20. stoletje: študij pretokov v grafih
Optimizacijski problemi v logistiki in transportni teoriji
Karl Menger, Lester R. Ford (1927-) in Delbert R. Fulkerson (1924-1976)

VI. Problem 8 dam

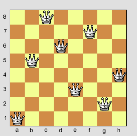
VI. Problem 8 dam

8 kraljic, ki se medsebojno ne napadajo, berlinski časnik, 1848



VI. Problem 8 dam

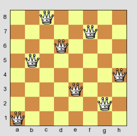
8 kraljic, ki se medsebojno ne napadajo, berlinski časnik, 1848



12 osnovnih rešitev. Z rotacijami in zrcaljenji $\rightarrow$ 92 rešitev

VI. Problem 8 dam

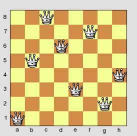
8 kraljic, ki se medsebojno ne napadajo, berlinski časnik, 1848



12 osnovnih rešitev. Z rotacijami in zrcaljenji $\rightarrow$ 92 rešitev

Carl Friedrich Gauss, 1777-1855

8 kraljic, ki se medsebojno ne napadajo, berlinski časnik, 1848



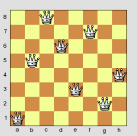
12 osnovnih rešitev. Z rotacijami in zrcaljenji $\rightarrow$ 92 rešitev

Carl Friedrich Gauss, 1777-1855

V jeziku grafov $\rightarrow$ **število maksimalnih diskretnih podmnožic**.

VI. Problem 8 dam

8 kraljic, ki se medsebojno ne napadajo, berlinski časnik, 1848



12 osnovnih rešitev. Z rotacijami in zrcaljenji → 92 rešitev

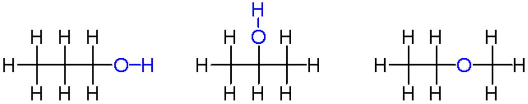
Carl Friedrich Gauss, 1777-1855

V jeziku grafov → **število maksimalnih diskretnih podmnožic**.

v 2. polovici 20. stoletja:
Teorija informacij, Teorija kodiranja, Metode umetne inteligence

VII. Preštevanje

Izomeri: ista molekulska formula, različne strukturne formule
na primer, C_3H_8O

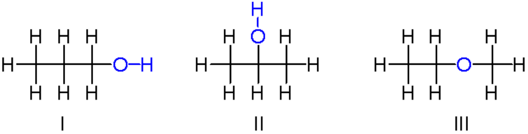


I II III

propanol, propil-alkohol, izpropil-alkohol

Koliko različnih spojin z dano molekulsko formulo obstaja?
Arthur Cayley, 1857

Izomeri: ista molekulska formula, različne strukturne formule
na primer, C_3H_8O



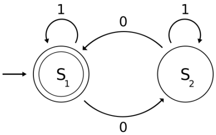
propanol, propil-alkohol, izpropil-alkohol

Koliko različnih spojin z dano molekulsko formulo obstaja?
Arthur Cayley, 1857

George Pólya, 1887-1985
Razvil teorijo preštevanja (npr. grafov z danimi lastnostmi)

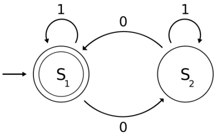
Končni deterministični avtomat

Posebne vrste usmerjeni graf z vrednostmi na povezavah



Končni deterministični avtomat

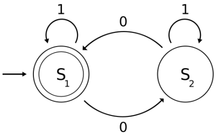
Posebne vrste usmerjeni graf z vrednostmi na povezavah



Razvoj računalništva → Intenziven razvoj Teorije avtomatov

Končni deterministični avtomat

Posebne vrste usmerjeni graf z vrednostmi na povezavah



Razvoj računalništva → Intenziven razvoj Teorije avtomatov

Pomembni v teoriji (logika, teorija izračunljivosti)
V vsakodnevnem življenu jih srečamo na vsakem koraku.

Načrtovanje in analiza podatkovnih struktur, urejanje podatkov

Načrtovanje in analiza podatkovnih struktur, urejanje podatkov

Časovna in prostorska zahtevnost

Načrtovanje in analiza podatkovnih struktur, urejanje podatkov

Časovna in prostorska zahtevnost

Izjemnega pomena: algoritmi na grafih

Načrtovanje in analiza podatkovnih struktur, urejanje podatkov

Časovna in prostorska zahtevnost

Izjemnega pomena: algoritmi na grafih

Na primer:
konstrukcija vpetega drevesa, konstrukcija najcenejših poti,
test povezanosti, planarnosti,
uporaba dreves pri urejanju podatkov

Simetrijske lastnosti grafov pomembne v teoriji in praksi
v kemiji: $\rightarrow$ kemijske in fizikalne lastnosti molekul

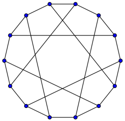
X. Študij simetrije

Simetrijske lastnosti grafov pomembne v teoriji in praksi
v kemiji: $\rightarrow$ kemijske in fizikalne lastnosti molekul

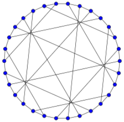
Avtomorfizem $=$ Povratno-enolična transformacija, ki graf ohranja

Simetrijske lastnosti grafov pomembne v teoriji in praksi
v kemiji: $\rightarrow$ kemijske in fizikalne lastnosti molekul

Avtomorfizem = Povratno-enolična transformacija, ki graf ohranja



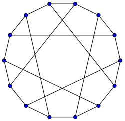
Heawoodov graf



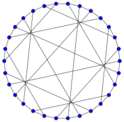
Tuttova 8-kletka

Simetrijske lastnosti grafov pomembne v teoriji in praksi
v kemiji: $\rightarrow$ kemijske in fizikalne lastnosti molekul

Avtomorfizem = Povratno-enolična transformacija, ki graf ohranja



Heawoodov graf

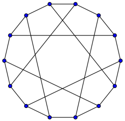


Tuttova 8-kletka

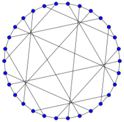
William T. Tutte, 1917-2002
1946: Razvil teorijo o simetričnih grafih valence 3.

Simetrijske lastnosti grafov pomembne v teoriji in praksi
v kemiji: $\rightarrow$ kemijske in fizikalne lastnosti molekul

Avtomorfizem = Povratno-enolična transformacija, ki graf ohranja



Heawoodov graf



Tuttova 8-kletka

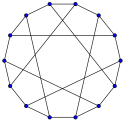
William T. Tutte, 1917-2002
1946: Razvil teorijo o simetričnih grafih valence 3.

Algebraična teorija grafov se razvije v 70' letih 20. stoletja

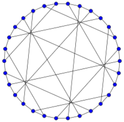
X. Študij simetrije

Simetrijske lastnosti grafov pomembne v teoriji in praksi
v kemiji: $\rightarrow$ kemijske in fizikalne lastnosti molekul

Avtomorfizem = Povratno-enolična transformacija, ki graf ohranja



Heawoodov graf



Tuttova 8-kletka

William T. Tutte, 1917-2002
1946: Razvil teorijo o simetričnih grafih valence 3.

Algebraična teorija grafov se razvije v 70' letih 20. stoletja
Pomemben doprinos slovenske šole.

Hvala!