

O stičiščih matematike in glasbe

Rudi Bučar in Dragan Marušič

Univerza na Primorskem

30.8.2012

Crispin Nash-Williams



Andrej Marušič





Andrew Duncan

1991 M.A. (magisterij, matematika) na UC Santa Cruz

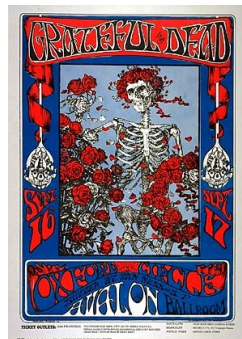
Naslov magistersega dela: Algebra of music theory

1999 PhD (doktorat, računalništvo) na UC Santa Barbara



Andrew Duncan, Combinatorial Music Theory (1991, JAES)

Grateful Dead



University of California Santa Cruz



Po Shanghai lestvici se uvršča med 101-150 univerz na svetu.

Univerza na Primorskem



University of California Santa Cruz

Matematika in glasba

Kombinatorika in glasba

Oktave

The diagram illustrates an 88-key piano keyboard divided into nine sections, numbered 1 to 9. Below the keyboard is a musical staff with a treble clef, showing the chromatic scale from C1 to C5. The notes are labeled with letters and numbers to indicate their octave and position:

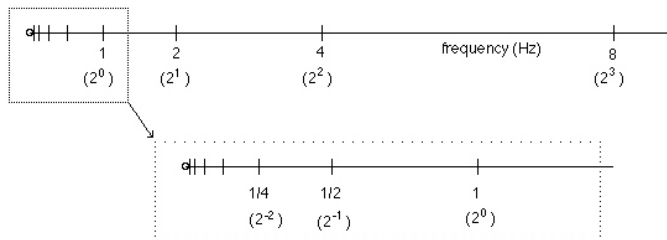
- Section 1: C1, D1, E1, F1, G1, A1, B1
- Section 2: C2, D2, E2, F2, G2, A2, B2
- Section 3: C3, D3, E3, F3, G3, A3, B3
- Section 4: C4, D4, E4, F4, G4, A4, B4
- Section 5: C5, D5, E5, F5, G5, A5, B5
- Section 6: C6, D6, E6, F6, G6, A6, B6
- Section 7: C7, D7, E7, F7, G7, A7, B7
- Section 8: C8, D8, E8, F8, G8, A8, B8
- Section 9: C9

The musical staff shows the notes in a chromatic scale, with the first octave (C1 to B1) in a lower register and the subsequent octaves (C2 to B8) in a higher register. The notes are labeled with letters and numbers to indicate their octave and position.

Dve frekvenci sta ločeni z **oktavo**, če sta v razmerju 2: 1.

Pravimo, da je 2Hz oktava nad 1Hz .

Toni, ki se razlikujejo za poljubno število oktav, so slišati enako.

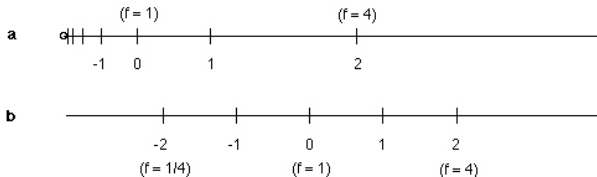


Na frekvenčni osi so označeni vsi toni, ki so s frekvenco 1Hz povezane z oktavami. Vse te frekvence so potence števila 2.

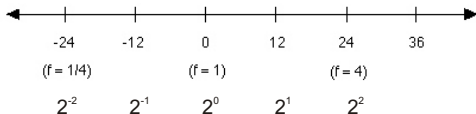
Namesto frekvenčne osi, vzememo os, na kateri predstavimo le potence iz frekvenčne osi na predhodni prosojnici.

Na ta način namesto množenja opazujemo seštevanje: premik za eno oktavo je sedaj prištevanje ali odštevanje števila 1.

Os raztegnemo oziroma skrčimo tako, da je ena oktava na osi vedno iste dolžine (glej sliko b).

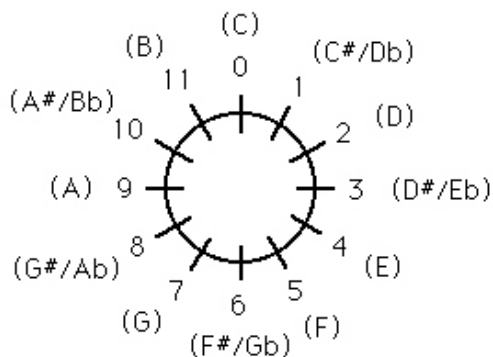


Izkaže se, da je prikladno oktavo razdeliti na 12 enakih delov.



Dva tona, ki se razlikujeta za eno oktavo, sta sedaj na naši osi na razdalji 12. Pri deljenju s številom 12 imata isti ostanek. Rekli bomo, da sta **ekvivalentna**.

Oktave na ciklu (krogu)



Oktave smo razdelili na 12 poltonov, ki so ločeni z 12 enakimi koraki.

<i>C (Unison)</i>	1.0	$2^{(0/12)}$	0
<i>C# / Db (Minor 2nd)</i>	1.0595	$2^{(1/12)}$	100
<i>D (Major 2nd)</i>	1.1225	$2^{(2/12)}$	200
<i>D# / Eb (Minor 3rd)</i>	1.1892	$2^{(3/12)}$	300
<i>E (Major 3rd)</i>	1.2599	$2^{(4/12)}$	400
<i>F (Perfect 4th)</i>	1.3348	$2^{(5/12)}$	500
<i>F# / Gb (Aug. 4th)</i>	1.4142	$2^{(6/12)}$	600
<i>G (Perfect 5th)</i>	1.4983	$2^{(7/12)}$	700
<i>G# / Ab (Minor 6th)</i>	1.5874	$2^{(8/12)}$	800
<i>A (Major 6th)</i>	1.6818	$2^{(9/12)}$	900
<i>A# / Bb (Minor 7th)</i>	1.7818	$2^{(10/12)}$	1000
<i>B (Major 7th)</i>	1.8877	$2^{(11/12)}$	1100
<i>C (Octave)</i>	2.0	$2^{(12/12)}$	1200

Števílo 12

Število 12

- ▶ Ura
- ▶ Lunino leto
- ▶ Koledarsko leto
- ▶ 12 zodiakalnih znamenj
- ▶ EU zastava ima 12 zvezd
- ▶ ducat
- ▶ Človek ima 12 parov reber
- ▶ čevelj (merska enota) ima 12 palcev
- ▶ ...



12 - twelve

Po etimološkem slovarju:

O.E. twelf, lit. “two left” (over ten), from P.Gmc. *twa-lif-, a compound of the root of two + *lif-, root of the verb leave (see eleven).

Število 12 v matematiki

▶ Prvo obilno število

Obilno (prekomerno, bogato ali abundantno) število je pozitivno celo število, za katerega je vsota pozitivnih pravih deliteljev enaka $\sigma^*(n) > n$, (oz. vsota pozitivnih deliteljev enaka $\sigma(n) > 2n$). Vrednost $\sigma(n) - 2n$ se imenuje obilnost števila n .

$$\sigma^*(12) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16 > 12$$

▶ Najmanjše vzvišeno število.¹

Vzvišeno število je pozitivno celo število, katerega število pozitivnih deliteljev $d(n)$ (vključno s številom samim) je popolno število in katerih vsota je spet popolno število (funkciji $d(n)$ in $\sigma(n)$ sta neki popolni števili). (Popolno število je pozitivno celo število n , za katerega je vsota pozitivnih pravih deliteljev enaka $\sigma^*(n) = n$.)

$$d(12) = 6 \quad \sigma(12) = 28 \quad \sigma^*(6) = 6 \quad \sigma^*(28) = 28$$

¹znani sta le dve vzvišeni števili 12 in število s 76 števki

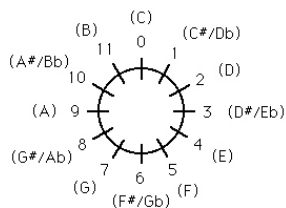
Intervali, Akordi, Lestvice

Interval je razdalja med dvema poltonoma.

- ▶ kvarta - npr. C-F
- ▶ kvinta - npr. C-G

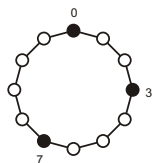
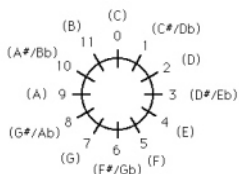
Akord je sozvočje treh ali več poltonov.

Lestvica je sosledje poltonov.

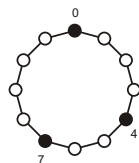


Intervali, Akordi, Lestvice

Intervale, akorde in lestvice lahko predstavimo z obarvanjem ustreznih točk na krogu oziroma z binarnimi zaporedji.



Minor triad
(molov kvintakord)



Major triad
(durov kvintakord)

Predstavitev z binarnimi zaporedji:

Minor triada: 1 00 1 000 1 0000

Major triada: 1 000 1 00 1 0000

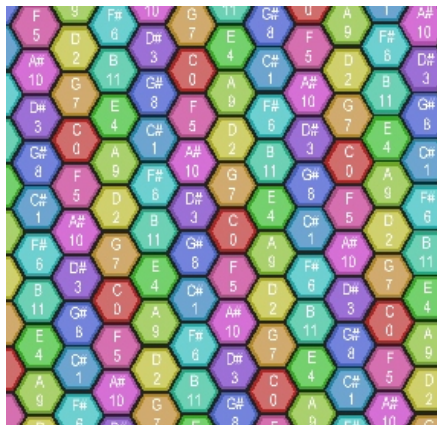
12-poltonska lestvica na heksagonalni mreži



12-poltonska lestvica na heksagonalni mreži



12-poltonska lestvica na heksagonalni mreži

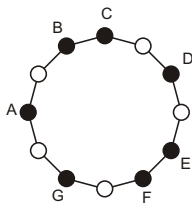


k-lestvice in *k*-akordi

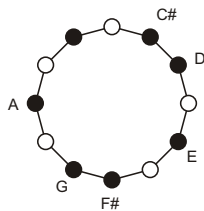
Koliko je “bistveno različnih” podlestvic (npr. 3-lestvice, 5-lestvice, itd) 12-poltonske lestvice?

To vprašanje je ekvivalentno vprašanju:

Koliko različnih ogrlic z 12 kroglicami, bele in črne barve, obstaja?



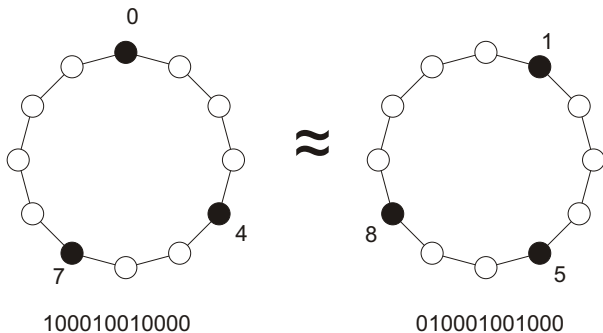
Osnovna lestvica



Rotirana lestvica

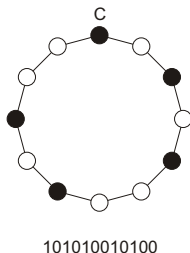
Koliko je vseh 3-akordov (kvintakordov) na 12-poltonski lestvici?

Vseh 3-akordov na 12-poltonski lestvici je $\binom{12}{3} = 220$.
Bistveno različnih pa je 19.



5-poltonske lestvice

Koliko je vseh možnih 5-poltonskih lestvic, če lahko izbiramo 5 poltonov izmed 12?



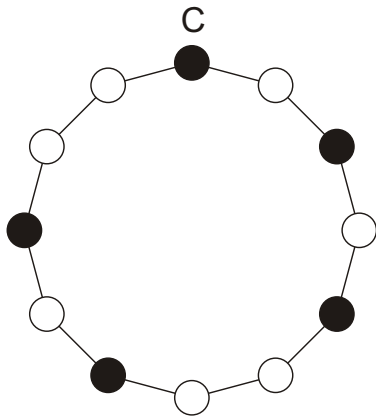
Ker je število 5 tuje številu 12, matematika pove, da izračun sledi preprosti formuli:

$$\text{število} = \frac{\binom{12}{5}}{12} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{11 \cdot 9 \cdot 8}{12} = 66.$$

5-poltonske lestvice zapisane z binarnimi zaporedji

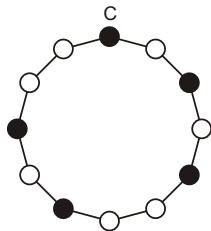
01 : 111110000000	21 : 111000100100	41 : 110100100100	61 : 110001010010
02 : 111101000000	22 : 111000100010	42 : 110100100010	62 : 110001001010
03 : 111100100000	23 : 111000011000	43 : 110100011000	63 : 110000101010
04 : 111100010000	24 : 111000010100	44 : 110100010100	64 : 101010101000
05 : 111100001000	25 : 111000010010	45 : 110100010010	65 : 101010100100
06 : 111100000100	26 : 111000001100	46 : 110100001100	66 : 101010010100
07 : 111100000010	27 : 111000001010	47 : 110100001010	
08 : 111011000000	28 : 111000000110	48 : 110011001000	
09 : 111010100000	29 : 110110100000	49 : 110011000100	
10 : 111010010000	30 : 110110010000	50 : 110011000010	
11 : 111010001000	31 : 110110001000	51 : 110010110000	
12 : 111010000100	32 : 110110000100	52 : 110010101000	
13 : 111010000010	33 : 110110000010	53 : 110010100100	
14 : 111001100000	34 : 110101100000	54 : 110010100010	
15 : 111001010000	35 : 110101010000	55 : 110010011000	
16 : 111001001000	36 : 110101001000	56 : 110010010100	
17 : 111001000100	37 : 110101000100	57 : 110010010010	
18 : 111001000010	38 : 110101000010	58 : 110010001010	
19 : 111000110000	39 : 110100110000	59 : 110001100010	
20 : 111000101000	40 : 110100101000	60 : 110001010100	

Pentatonska lestvica (pentatonika)



101010010100

Zakaj ravno pentatonika, 101010010100?



101010010100

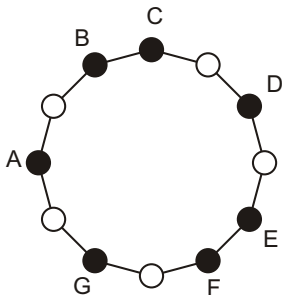
0	2	4	7	9
1	3	5	8	10
2	4	6	9	11
3	5	7	10	0
4	6	8	11	1
5	7	9	0	2
6	8	10	1	3
7	9	11	2	4
8	10	0	3	5
9	11	1	4	6
10	0	2	5	7
11	1	3	6	8

Intervalni spekter:

101010010100 : 503214041230

Maksimalno možno število kvart in kvint (4). Edina 5-poltonska lestvica s to lastnostjo.

Diatonska lestvica (C-durova ali osnovna durova lestvica)



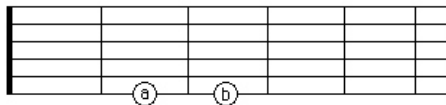
Osnovna lestvica

Intervalni spekter:

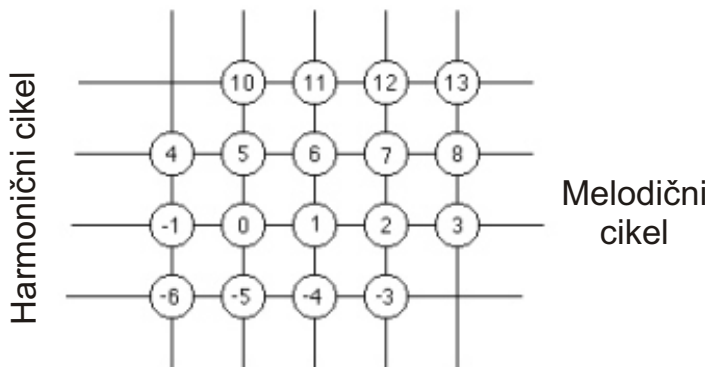
110101101010 : 725436163452

Maksimalno možno število kvart in kvint (6). Edina 7-poltonska lestvica s to lastnostjo.

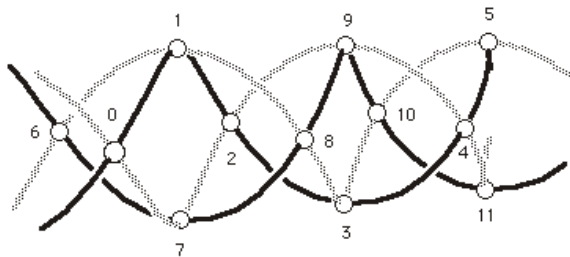
Klaviatura (kitarski vrat)



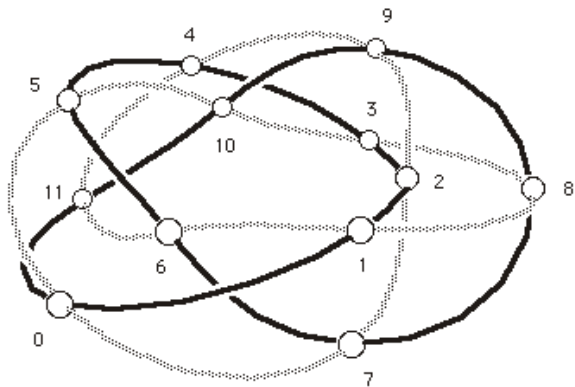
Klaviatura (kitarski vrat)



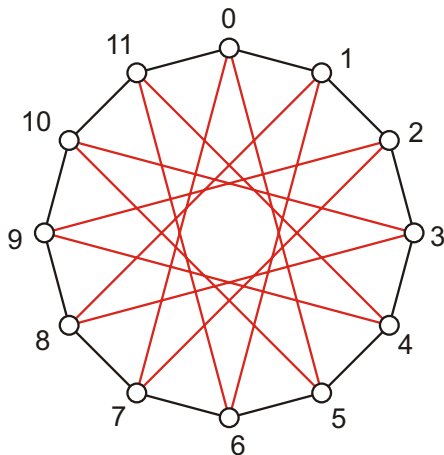
Klaviatura (kitarski vrat)



Klaviatura (kitarski vrat)

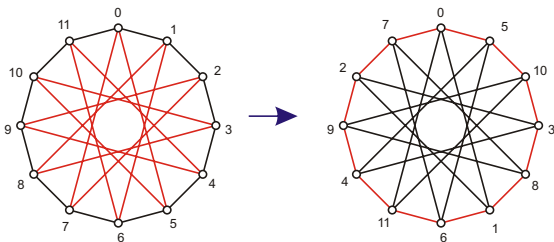
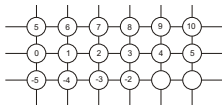


Klaviatura (kitarski vrat)



Cayleyev graf $\text{Cay}(\mathbb{Z}_{12}, \{\pm 1, \pm 5\})$ grupe \mathbb{Z}_{12} .

Klaviatura (kitarski vrat)

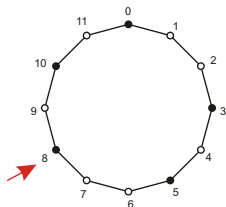
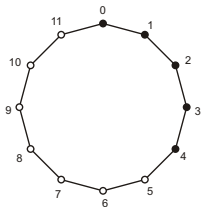


Množenje s številom 5 melodijo spremeni v harmonijo.

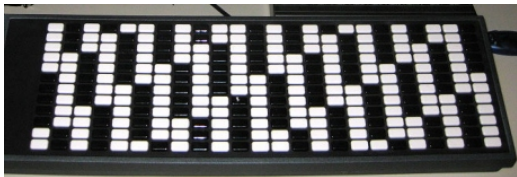
Zakaj ravno pentatonika, 101010010100?

Katerokoli melodično zaporedje dolžine 5 se pri množenju s 5 spremeni v harmonično zaporedje dolžine 5, ki znotraj 12-poltonske lestvice tvori ravno pentatoniko.

$$0, 1, 2, 3, 4 \rightarrow 0, 5, 10, 3, 8 = 0, 3, 5, 8, 10$$



Z-Board (Andrew Duncan)



Hvala.